This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

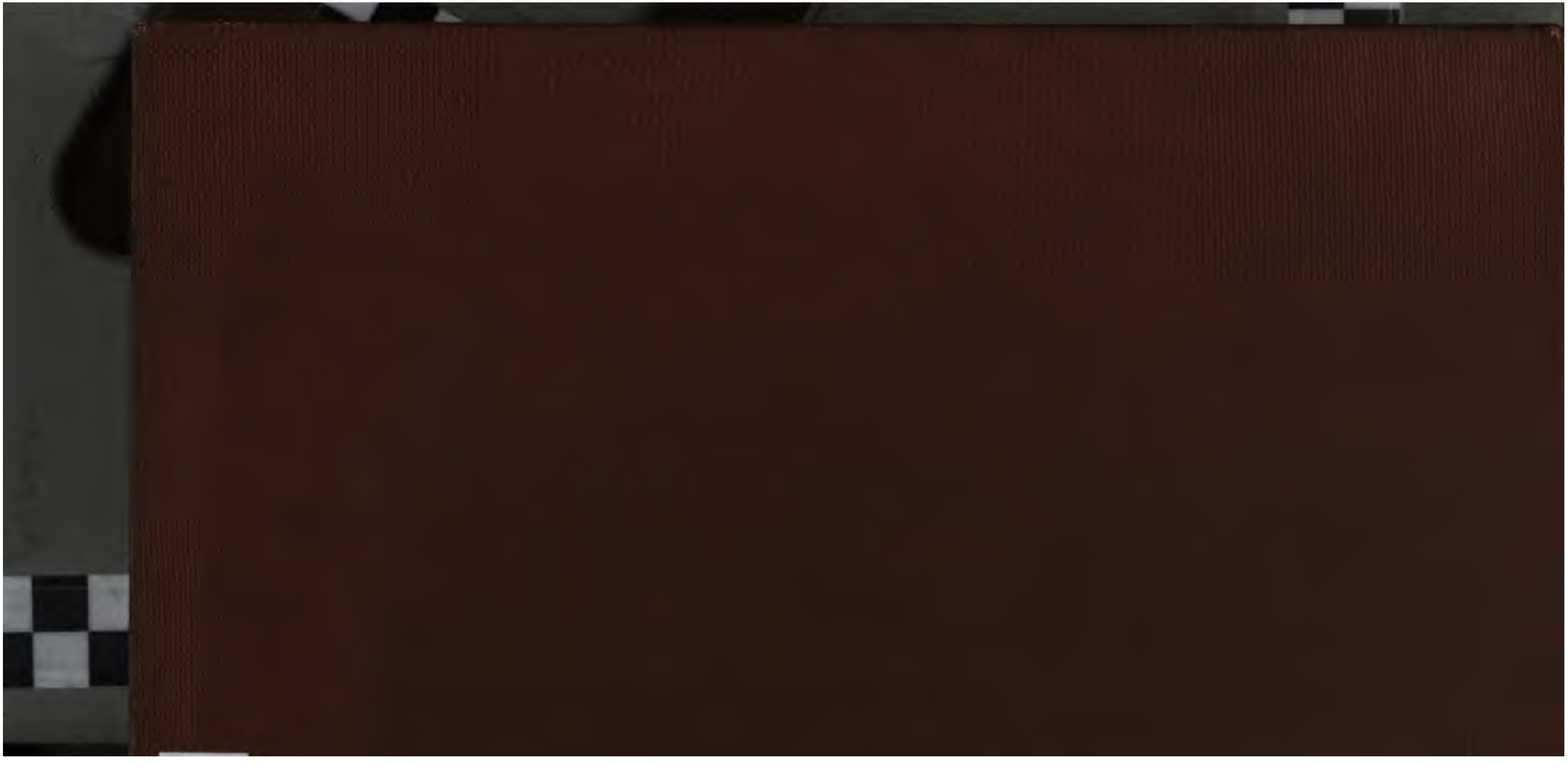
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`



TRAITÉ ELÉMENTAIRE

DE

MÉCANIQUE.

« Au milieu de l'infinie variété des phénomènes qui se succèdent « continuellement sur la terre, on est parvenu à démêler le petit « nombre de lois générales que la matière suit dans ses mouve- « mens. Tout leur obéit dans la nature; tout en dérive aussi « nécessairement que le retour des saisons; et la courbe décrite « par l'atôme léger que les vents semblent emporter au hasard, « est réglée d'une manière aussi certaine, que les orbes plané- « taires. »

LA PLACE, *Système du monde*, livre III.

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

DE MÉCANIQUE,

PAR L. B. FRANCŒUR,

PROFESSEUR AUX ECOLES CENTRALES DE PARIS, ET RÉPÉTITEUR D'ANALYSE A L'ECOLE POLYTECHNIQUE.

OUVRAGE DESTINÉ POUR L'ENSEIGNEMENT

DANS LES LYCÉES NATIONAUX ET A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

TROISIÈME ÉDITION

CONSIDÉRABLEMENT AUGMENTÉE.

DE L'IMPRIMERIE DE H. L. PERRONNEAU.

A PARIS,

CHEZ COURCIER, LIBRAIRE, QUAI DES AUGUSTINS.

XII. — 1804.

ASTOR LIBRARY
NEW-YORK

A

P. S. LA PLACE,

CHANCELIER DU SÉNAT,

MEMBRE DE L'INSTITUT NATIONAL

DES SCIENCES ET ARTS,

ET AUTEUR

DE LA MÉCANIQUE CÉLESTE.

L. B. FRANCOEUR.

PRÉFACE.

Les sciences n'ont jamais été aussi généralement cultivées en France que depuis quelques années : la considération accordée aux savans, les besoins de la guerre et le desir de la gloire en sont sans doute les motifs principaux. Pour augmenter cette émulation utile aux progrès des sciences, des géomètres distingués n'ont pas dédaigné d'écrire pour l'instruction des élèves. La Grange, La Place à l'École normale, Monge, Le Gendre et Lacroix dans leurs Traités élémentaires, ont appris à asseoir les principes des Mathématiques sur des bases solides.

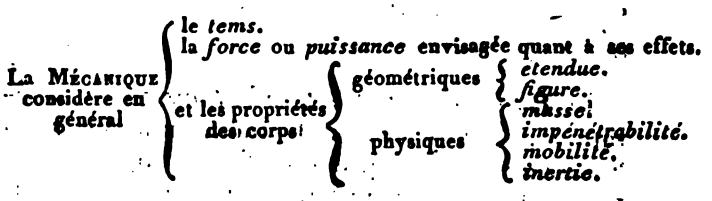
L'École polytechnique a été un motif d'émulation ; et cette institution, dont l'Etat tire une partie de ses soutiens, a, dès son enfance, rendu des services marqués. L'instruction s'est perfectionnée dans cette école, par les soins des instituteurs qui la composent : La Grange, Monge et Prony dans leurs leçons y ont développé d'une manière nouvelle l'Analyse et la Mécanique. Les ouvrages de ces savans sont des modèles de clarté et de précision ; et la *Mécanique céleste*, assigne à son auteur un rang distingué auprès de Descartes, Newton, Euler, ... Malheureusement ces ouvrages, ne sont entendus que d'un petit nombre de savans. Frappé de cette réflexion, je conçus et

j'exécutai le projet de faire en Mécanique ce que Lacroix et Le Gendre avoient déja fait d'une manière si lumineuse dans d'autres parties. Je fis ce Traité dans l'intention qu'il pût servir d'étude préliminaire aux savans écrits dont je viens de parler. Le choix que le Gouvernement a daigné faire de ce Traité pour l'enseignement dans les Lycées, d'après le suffrage de La Place, Monge et Lacroix, et l'accueil favorable que le public a bien voulu accorder aux deux premières éditions, m'ont déterminé à en revoir tous les détails avec un soin plus particulier. D'après les avis que le Sénateur La Place a eu la bonté de me donner, j'ai changé un grand nombre de démonstrations peu lucides, et j'ai supprimé une foule de longueurs et de choses inutiles. En offrant cette nouvelle édition au public j'ose lui promettre que c'est en effet un ouvrage nouveau et qui n'a presque rien de commun avec les précédentes éditions, que la marche méthodique qui m'a semblé trop avantageuse pour y rien changer, et dont j'ai recueilli beaucoup de fruits dans l'enseignement. Voici comment Prony a tracé lui-même cette marche.

Une science quelconque a toujours pour base ou matériaux primitifs, un certain nombre de notions abstraites ou idées générales qu'elle emprunte ou de l'*intelligence moyenne*, ou des sciences intermédiaires. Les opérations de l'entendement, dont ces idées sont le résultat, doivent avoir été faites d'avance chez ceux qui veulent se livrer à l'étude de cette science; et

ils y consacreroient inutilement leur tems et leurs peines, sans l'*aptitude* que cette préparation préliminaire donne à leur esprit. Ainsi, dans la science de l'équilibre et du mouvement dont nous allons nous occuper, la première connoissance à donner à l'élève se réduit à lui faire une récapitulation méthodique de celles des idées abstraites auxquelles les exercices antérieurs de son esprit l'ont déja conduit, qu'il doit séparer des autres pour les considérer sous un point de vue nouveau et particulier, et en composer diverses agrégations représentées par des signes qui forment les élémens de la langue scientifique.

Ces idées abstraites ou matériaux primitifs sont compris et classés dans le tableau suivant,



Le *tems* est, par rapport à nous, l'impression que laisse dans la mémoire une suite d'événemens dont nous sommes certains que l'existence a été successive. On peut voir n°. 3. ce que nous disons de la nature des *forces*. Les propriétés physiques et géométriques étant en quelque sorte étrangères à la Mécanique, et propres à la métaphysique, nous n'en disons que ce qu'il importe de savoir pour notre objet.

Mais pour ne pas compliquer les considérations nous n'employons pas sur-le-champ ces trois notions à-la-fois, et nous supposons d'abord que les corps qui sont soumis à l'examen sont dépouillés de plusieurs propriétés. D'abord on ne fait nullement entrer le tems en considération, ce qui est le propre de la STATIQUE; et même, pour faciliter l'étude, nous n'examinons d'abord que les conditions de l'équilibre entre des forces qui agissent sur un point matériel, en ne conservant ainsi que les notions de la *force* et de la *mobilité*. Mais après avoir épuisé ce sujet nous restituons aux corps l'*étendue* et la *figure* dont on les avoit dépouillés par la pensée. La théorie des centres de gravité, l'équilibre des machines, le frottement, ... se présentent ensuite naturellement comme autant de conséquences des préceptes généraux de la Statique.

La DYNAMIQUE fait entrer le *tems* en considération; nous y suivons la même marche qu'en Statique; nous ne prenons d'abord qu'un point matériel en mouvement. Mais bientôt aux notions du *tems*, de la *force* et de la *mobilité* nous joignons celles de la *masse*, de l'*étendue*, etc. ... On voit combien cette marche méthodique est propre à simplifier les théories et qu'elle est d'accord avec la manière dont l'esprit humain acquiert ses diverses connoissances. Enfin vient la théorie des fluides, qui compose l'HYDROSTATIQUE et l'HYDRODYNAMIQUE : elle est ici présentée avec des développemens beaucoup plus étendus que dans les éditions précédentes.

J'ai indiqué par une * mise à la marge, les théories de Statique les plus faciles et spécialement *celles qui sont exigées pour l'examen d'entrée à l'Ecole polytechnique*. Les candidats pourront puiser dans cet ouvrage les connoissances qui leur sont utiles, et étudier la Statique d'après les principes mêmes qui composent le cours d'instruction de cette Ecole. Si on a bien compris les principes que je viens de développer, on reconnoîtra que je ne pouvois, sans interrompre l'ordre méthodique que j'ai présenté, suivre l'exemple de plusieurs auteurs, et traiter l'équilibre des forces parallèles, avant celui des forces appliquées en un point. Aussi ai-je traité le *Parallélogramme des forces* avant le *Levier*. En effet lorsqu'on a fait quelques pas dans la science on est conduit à regarder les forces parallèles comme un cas particulier des forces qui concourent; et c'est toujours dans cet esprit qu'on les considère. La Place a également suivi cette marche; elle offre l'avantage de n'introduire d'abord dans le système qu'une seule espèce d'équilibre, celui de *translation*; tandis que les forces parallèles font entrer en outre l'équilibre de *rotation*. Elle est basée sur des principes plus clairs puisque par-là toute la Statique se ramène à l'*équilibre de deux forces égales et directement opposées*. D'ailleurs lorsqu'on commence l'étude de la Mécanique par celle des forces parallèles, on peut être arrêté par une foule de cas particuliers sur les directions et les grandeurs des forces, ce qui entraîne dans des idées complexes, opposées à la simplicité qu'exigent les élémens. La marche

que j'ai suivie n'offre sur ce point d'autre désavantage que d'être plus longue. Pour l'utilité des élèves qui sont destinés à subir des examens, dans lesquels il importe de développer les méthodes en peu de tems, j'ai cru devoir consigner dans la note I une démonstration que j'ai mise à l'épreuve depuis plusieurs années, en l'enseignant à des élèves qui se destinoient à l'Ecole polytechnique.

J'ai banni de cet ouvrage la notation des proportions : de sorte qu'au lieu d'écrire $A : B :: C : D$, je pose $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$. Ce n'est pas ici le lieu de détailler tous les motifs qui m'ont déterminé à cet usage : mais je dois dire que dans l'instruction j'en ai tiré des avantages réels. Je suis convaincu qu'on énonce un grand nombre de théorêmes avec beaucoup plus de facilité, de clarté et de généralité sous la forme d'équation. Les proportions n'offrent que l'un des moyens qui conduisent aux équations, tandis que le langage et la notation que j'adopte les donnent immédiatement, ce qui évite un détour. Un élève qui s'est servi quelque tems des formules trigonométriques lorsqu'il veut résoudre
Fig. 7. le triangle ABC, rectangle en C (dans lequel $AC = x$, $BC = y$, $AB = h$, l'angle $A = s$, le rayon $= 1$) trouve bientôt les équations

$$y = x \operatorname{tang} s, \quad y = h \sin s, \quad x = h \cos s$$

sans s'arrêter à former une proportion pour les obtenir : ce n'est qu'après avoir reconnu le dé-

tour, lorsqu'il a le bon esprit de l'appercevoir, qu'il l'abandonne. Il conviendroit donc d'énoncer ainsi les théorêmes de la résolution des triangles rectangles.

Un côté de l'angle droit est égal 1°. *au produit de l'autre côté par la tangente de l'angle opposé au premier côté ;* 2°. *au produit de l'hypothénuse par le cosinus de l'angle compris entre ces côtés :* le rayon étant = 1.

J'ai même porté cette réforme dans l'enseignement public, jusque sur la Géométrie, et j'ai reconnu tout l'avantage qu'on en pouvoit tirer en présentant aux élèves les comparaisons sous un aspect plus raisonné et plus méthodique. Je ne prétends pas pour cela qu'il faille abandonner l'usage des proportions ; elles sont précieuses sans doute : mais la notation me paroît devoir être changée. Celle que je présente ici a l'avantage de se prêter aussi à l'énonciation reçue : et il seroit sans doute ridicule de prétendre changer ces énoncés si simples :

Les triangles semblables ont les côtés homologues proportionnels.

Les côtés d'un triangle sont proportionnels aux sinus des angles qui leur sont opposés.

L'ouvrage est terminé par le problême des *cordes vibrantes :* on sait que cette matière intéressante par elle-même, est d'ailleurs l'une des sources de la partie la plus intéressante de

l'analyse, le calcul aux différences partielles. Enfin j'ai exposé la *méthode des variations*, sans laquelle il est impossible d'entendre la Mécanique transcendante : le peu que j'ai dit sur cette matière, que j'ai d'ailleurs présentée d'une manière nouvelle, suffira pour l'intelligence des écrits de LA GRANGE et de LA PLACE.

TABLE

DES MATIERES.

1 à 9 Notions préliminaires, et définitions des forces, de leurs directions et de leurs grandeurs. Divisions générales. P. 1

LIVRE I. *STATIQUE.*

CHAPITRE Ier. Equations d'équilibre.

I. *Propositions générales.*

10. La résultante de plusieurs forces qui agissent suivant la même droite est égale à la somme de ces forces, prises avec leurs signes. 5

11. On peut prendre pour point d'application d'une force l'un quelconque de ceux de sa direction, pourvu qu'il soit invariablement lié au système. *ib.*

12, 13 et 14. Propositions préliminaires relatives à la résultante de deux forces égales. 6

15 et 16. Quand on fait varier dans le même rapport les grandeurs de plusieurs forces appliquées en un point, leur résultante ne change pas de direction et varie dans le même rapport; et réciproquement. 7

II. *Parallélogramme des forces.*

17. La résultante de deux forces égales est la diagonale du rhombe construit sur les forces. 9

18. Celle de deux forces quelconques est la diagonale du parallélogramme. 12

19. Lorsque trois forces sont en équilibre, chacune d'elles peut être représentée par le sinus de l'angle formé par la direction des deux autres. 15

II. *Centre de gravité des figures rectilignes et des polyèdres.*

57. Centre de gravité du contour d'un polygone. 53
58. Celui de l'aire d'un triangle est placé au tiers à partir de la base sur la ligne menée du sommet au milieu de la base. 54
59 et 60. Celui de l'aire d'un polygone, et d'un polyèdre. *ib.*
61. Celui du volume d'un prisme. 55
62. Celui d'une pyramide est placé au quart à partir de la base sur la droite menée du sommet au centre de gravité de la base. 56
63. Celui du volume d'un polyèdre quelconque. 57

III. *Centres de gravité des courbes et des surfaces courbes.*

64. Centre de gravité d'une ligne. *ib.*
65. Celui d'une droite est au milieu de sa longueur. 60
66. Celui d'un arc de cercle a pour distance au centre une quatrième proportionnelle à l'arc au rayon et à la corde. 61
67. Centre de gravité d'un arc de cycloïde. 62
68. Centre de gravité de l'aire d'une courbe plane. 63
69. Applications au trapèze, au parallélogramme, au triangle. 65
70. Celui d'un segment de parabole est aux $\frac{1}{3}$ de la longueur de son abscisse. 66
71. Centre de gravité de l'aire des surfaces de révolution. Application au cas où la ligne génératrice est droite. *ib.*
72. Celui d'une calotte sphérique est au centre de la flèche. 67
73. Centre de gravité d'une surface courbe quelconque. 68
74. Celui du volume d'un corps symétrique par rapport à un axe. *ib.*
75. Application à la pyramide et au cône. 69
76. Centre de gravité des volumes de révolution. 70
77. Application à la sphère, à la parabole et à l'hyperbole. *ib.*
78. Centre de gravité d'un corps quelconque. 72
79. Centre de gravité d'un secteur sphérique. *ib.*

IV. *Méthode Centrobarique.*

80, 81 et 82. Lorsqu'une ligne tourne autour d'un axe, la surface et le volume qu'elle engendre est le produit de la ligne ou de l'aire génératrice par l'arc que son centre de

gravité a décrit. Application à la sphère, au cylindre et au cône. 73

83. Cette proposition sert aussi à trouver la surface où le volume d'un corps de révolution dont on connoît le centre de gravité. 76

CHAPITRE III. DES MACHINES.

84. Définition. 78

I. *Cordes.*

85 et 86. Des tensions; des forces qui agissent sur un point. 79

87 et 88. Pour qu'un polygone funiculaire soit en équilibre, il faut que cet état existe en appliquant à un point unique parallélement à leurs directions, les forces qui le sollicitent. 80

89. De la résultante des forces qui agissent sur le polygone funiculaire. 82

90. Cas où les forces sont des poids. *ib.*

91. Equation de la chaînette. 84

92, 93 et 94. Cas où les cordons sont unis par des nœuds coulans. 87

II. *Equilibre sur une ligne.*

95. Pour qu'un point matériel soit en équilibre sur une ligne, il faut que la résultante des forces qui le sollicitent soit perpendiculaire à cette ligne. Cette résultante est la pression. 88

96. Pour qu'un point pesant soit retenu en équilibre sur un plan incliné par une force, il faut que le plan vertical qui passe par cette force soit perpendiculaire au plan incliné, et de plus que les composantes de la force et du poids dans le sens du plan soient égales et opposées. Valeur de la pression. 90

97. Equilibre d'un point sur une ligne courbe. 93

98. Equilibre de deux poids sur deux plans inclinés adossés. 94

99. Le même problème pour deux courbes. 95

100. Lorsqu'il s'agit d'un corps placé sur un plan, outre les conditions ci-dessus, il faut encore que la résultante

des forces ne laisse pas tous ses appuis d'un même côté. 97
101. De la pression qu'éprouve chacun des points de contact. 99
102. Equilibre d'un corps pesant sur deux plans inclinés. 100

III. *Lévier.*

103. Pour que deux forces soient en équilibre à l'aide d'un lévier, il faut que leurs momens soient égaux par rapport au point d'appui. 101
104 et 105. De la romaine et de la balance. 102

IV. *Poulie.*

106. Dans la poulie fixe, deux forces en équilibre sont égales. 105
107. Equation d'équilibre dans la poulie mobile. 106
108. Equilibre dans un système de poulies mobiles. 107
109. Du cas où les cordons sont parallèles; mouffles. *ib.*

V. *Treuil.*

110 et 111. Dans l'équilibre du treuil les momens des puissances par rapport à l'axe sont égaux. 109
112. Des pressions exercées sur les appuis, 111

VI. *Roues dentées.*

113. Condition d'équilibre. 112
114. Vitesses respectives des diverses roues d'engrenage. 114
115 et 116. Description des horloges. 116
117. Des roues dentées dont les axes ne sont pas parallèles. 121

VII. *Cric.*

118. Equilibre du cric simple et du cric composé. *ib.*

VIII. *Vis.*

119. Génération de la vis et de l'écrou. 122
120. Condition d'équilibre. 123

IX. *Coin.*

121 et 122. Condition d'équilibre. 126

X. *Machines composées.*

123 et 124. Vis sans fin; description et condition d'équilibre. 129
125 et 126. Pont-levis; description et condition d'équilibre. 130
127. Haquets; description et condition d'équilibre. 134
128. Grue; description et condition d'équilibre. 135

CHAP. IV. Obstacles que les machines opposent aux forces.

I. *Réflexions générales sur les machines.*

129. On perd du côté du tems ce qu'on gagne du côté de la force. 136
130. Avantage qu'on peut retirer de ce principe. 137

II. *Du frottement.*

131, 132, 133 et 134. Nature du frottement; il est proportionnel à la pression; vérités que l'expérience démontre. 139
135. Frottement sur le plan incliné. 142
136, 137 et 138. Frottement dans les machines de rotation, telles que le lévier, la poulie et le treuil. 144
139. Frottement dans la vis. 147

III. *Roideur des cordes.*

140 et 141. Moyen d'avoir égard à la roideur des cordes dans les machines. 149

IV. *Frottement d'une corde roulée sur un cylindre.*

142. Relation entre la force et la résistance. 152

LIVRE II. *DYNAMIQUE.*

CHAPITRE I. Mouvement rectiligne d'un point.

I. *Mouvement uniforme.*

143 et 144. Les espaces décrits sont proportionnels aux tems. *La vîtesse* est le rapport de l'espace au tems. 155
145. Loi d'inertie. Le mouvement uniforme est dû à une impulsion. 156

146. Les forces sont proportionnelles aux vitesses qu'elles impriment; conséquences qui en résultent. 158
147. Du mouvement uniforme de plusieurs mobiles suivant la même droite. 160

II. *Mouvement varié en général.*

148 et 149. La vitesse est l'élément de l'espace divisé par l'élément du tems. 163
150, 151 et 152. Des forces accélératrices : elles ont pour mesure l'élément de la vitesse divisé par l'élément du tems. 164
153 Usage des équations du mouvement. 166

III. *Mouvement uniformément varié.*

154 et 155. Ce mouvement est dû à une force continue et constante. La vitesse croît proportionnellement au tems. La force accélératrice est mesurée par la vitesse acquise au bout de chaque unité de tems, ou par le double de l'espace qu'elle fait décrire au mobile dans la première unité de tems. 167
156 et 157. Application à la pesanteur; vitesse due à une hauteur. 169

IV. *Applications des formules du mouvement varié.*

158 et 159. De la vitesse des projectiles dans les armes à feu. 173
160 et 161. De l'attraction en raison inverse du quarré de la distance à un centre fixe. 176
162. Mouvement vertical des corps pesans dans un milieu résistant. 179

CHAPITRE II. Mouvement curviligne d'un point.

I. *Propositions générales.*

163. Cause et origine du mouvement curviligne. 183
164. De la vitesse et de la direction du mouvement. *ib.*
165. Moyen de faire dépendre le mouvement curviligne de plusieurs mouvemens rectilignes. 184
166 et 167. Equations du mouvement libre; usage de ces équations. 185

168 et 169. Valeur de la vîtesse; application. 188
170. Principe des aires; cas où ce principe a lieu. 190

II. *Mouvement des projectiles.*

171 et 172. La trajectoire dans le vide est une parabole dont l'axe est vertical; l'amplitude du jet est double de l'abcisse du sommet. 191
173, 174 et 175. De la trajectoire dans un milieu résistant; manière de construire cette courbe et ses asymptotes. 195
176 et 177. Manière de former des tables pour toutes les portées et les inclinaisons. 202

III. *Gravitation universelle.*

178 à 182. Des lois de Képler; manière dont l'expérience les démontre. 205
183. La force qui sollicite chaque planète est dirigée vers le centre du soleil. 212
184. Cette force agit en raison inverse du quarré de la distance du centre de la planète à celui du soleil. 213
185 et 186. Et en raison directe des masses. 216
187. Les molécules de la matière s'attirent en raison directe des masses et inverse du quarré des distances. 218

IV. *Mouvement d'un corps pesant dans un canal.*

188 et 189. Mouvement sur un plan incliné. 220
190. Comparaison avec le mouvement libre. Isochronisme dans le cercle. 221
191. Mouvement sur un plan incliné en ayant égard au frottement; problème des traîneaux. 222
192 et 193. De la vîtesse d'un corps qui décrit un canal curviligne; moyen de déterminer les circonstances de son mouvement. 223

V. *Pendule simple.*

194 et 195. Des oscillations très-petites: procédé pour déterminer la longueur de la pendule à secondes, et la valeur de la gravité. 225
196 et 197. Des oscillations de grandeur quelconque. 229

VI. *Propriétés mécaniques de la Cycloïde.*

198. La cycloïde est une tautochrone. 231
199 et 200. Il y a une infinité de tautochrones à double courbure ; la cycloïde est la seule tautochrone plane. 233
201. La courbe de plus vite descente est une cycloïde. 235

VII. *Mouvement sur une courbe plane.*

202 et 203. Equations générales du mouvement. 238
204. Valeur de la vitesse ; la pression qu'exerce le mobile sur la courbe ne diminue rien de sa vitesse ; si le corps n'est mu qu'en vertu d'une impulsion, sa vitesse est constante. 240
205 et 206. Valeur de la pression ; application. 242
207. De la force centrifuge ; sa valeur. 244
208. Courbe d'égale pression. 246
209, 210 et 211. De la force centrifuge dans le mouvement des frondes et celui de la terre ; de la vitesse angulaire. 249

VIII. *Mouvement sur une surface courbe.*

212. Equations générales du mouvement. 250
213. Valeur de la pression. 251
214, 215 et 216. Applications au mouvement sur le paraboloïde et sur la sphère ; du pendule en général. 252

CHAPITRE III. *Mouvement d'un système.*

I. *Choc direct des corps.*

217. Deux corps durs sont en repos après le choc lorsque la somme de leurs quantités de mouvement (prises avec leurs signes) est égale à zéro ; la quantité de mouvement d'un corps en mouvement mesure sa force. 262
218. De la vitesse de deux corps durs après le choc. 265
219. Application ; de l'inertie ; elle est proportionnelle à la masse ; conservation du mouvement du centre de gravité. 266
220, 221 et 222. De la force motrice, de la pression et du poids. 268
223. Vitesse de deux corps élastiques après le choc. 270
224 et 225. Applications. 272

226. La force vive est la même avant et après le choc de deux corps élastiques. 273

II. *Choc oblique des corps à ressort.*

227 et 228. Un corps élastique qui choque obliquement un obstacle, se réfléchit en faisant l'angle de réflexion égal à l'angle d'incidence. Applications. 274

III. *Principe de d'Alembert.*

229. Le principe de d'Alembert sert à faire dépendre des théorèmes de statique tous les problèmes de dynamique. 276
230 et 231. Mouvement après le choc des corps durs et élastiques. 277
232, 233 et 234. Mouvement sur la poulie; machine d'Athood. 279
235. Mouvement sur deux plans inclinés adossés. 282
236. Mouvement sur le treuil. 283
237 et 238. Mouvement sur la poulie et le treuil en ayant égard au poids des cordons et à l'inertie. 285

IV. *Du moment d'Inertie.*

239. Du moment d'inertie d'un système par rapport à un axe; manière de déterminer ce moment pour un corps de figure connue. 288
240 et 241. Moyen de changer d'axe. Le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe, est égal au moment d'inertie pris par rapport à un autre axe parallèle passant par le centre de gravité, plus au produit de la masse du corps par le quarré de la distance entre les deux axes. 290
242. Applications au cercle, à la sphère, etc. 291

V. *Mouvement d'un corps choqué autour d'un axe.*

243. Manière de déterminer la vîtesse de rotation : centre de percussion. 296
244. Le même problème lorsque le corps est déjà en mouvement autour de l'axe avant le choc. 299
245. Pression exercée sur l'axe fixe. 300

VI. *Pendule composé.*

246. Valeur de la force accélératrice angulaire en général. 301
247, 248, 249 et 250. Pendule composé; centre d'oscillation et propositions qui y sont relatives. 303
251. Applications à la sphère, aux lentilles des pendules, etc. 306
252. Position du centre d'oscillation d'un système de corps. 308

VII. *Théorie physique de la Percussion.*

253, 254 et 255. Tout corps choqué prend un double mouvement, lorsque la direction du choc ne passe pas par le centre de gravité : 1°. ce centre se meut comme si le choc lui étoit immédiatement imprimé; 2°. le corps tourne autour de ce centre, comme s'il étoit fixe. 309
256 et 257. Vitesse de la rotation; application au mouvement de la Terre; centre spontané de rotation. 313
258. Mouvement après le choc des corps figurés. 315

VIII. *Mouvement d'un corps solide mu par des forces accélératrices qui agissent sur toutes ses parties.*

259. Equations générales du mouvement. 317
260, 261 et 262. Indépendance du double mouvement de translation et de rotation que prend le corps. 321
263. Principe de la conservation des aires. 323
264. Principe de la conservation des forces vives. 324

LIVRE III. *HYDROSTATIQUE.*

CHAPITRE I. DE L'ÉQUILIBRE DES FLUIDES EN GÉNÉRAL.

I. *Proposition fondamentale.*

265, 266, 267 et 268. Nature des fluides; propriété qui les caractérise. 326
269 et 270. Equation fondamentale. 328

II. *Condition d'équilibre et pressions d'une masse fluide.*

271. Valeur de la pression qu'exerce une masse fluide en un point quelconque. 330

272. Condition d'équilibre; équation de la surface libre du fluide; couches d'égale pression. 332
273. Applications aux forces centrales et à la gravité. 333

CHAPITRE II. Des fluides incompressibles et pesans.

I. *Des Syphons et Niveaux; pressions exercées sur les parois des vases.*

274 et 275. La surface du fluide est horisontale; théorie des syphons et des niveaux. 336
276. Pression exercée en un lieu de la masse fluide; pesanteur spécifique. 337
277 et 278. Pression totale exercée sur une surface plane horisontale; épaisseur à donner aux tuyaux de conduite. 338
279, 280 et 281. Pression totale exercée sur une surface plane disposée d'une manière quelconque; centre de pression; application à la poussée qu'éprouve la vanne d'une écluse. 340

II. *Conditions d'équilibre des corps flottans.*

282 et 283. Un corps flottant éprouve de la part du fluide des pressions horisontales qui se détruisent; les pressions verticales ont leur résultante égale au poids du volume du fluide déplacé; cette force passe par le centre de gravité de ce volume. 343
284. Le poids d'un corps flottant est diminué du poids du fluide qu'il déplace. Pour que ce corps soit en équilibre, il faut que ces poids soient égaux, et que la droite qui passe par les centres de gravité du corps et du fluide déplacé, soit verticale. 346
285. De ce qui arrive lorsque la première de ces deux conditions n'est pas remplie. 347
286. Tout cela a lieu en ayant égard au poids de l'atmosphère. 348
287 et 288. Recherche des positions d'équilibre d'un corps donné. 34
289 et 290. Positions d'équilibre des prismes triangulaires. 350

291 et 292. De l'enfoncement d'un corps flottant lorsqu'on lui ajoute un poids. 353

III. *De l'Aréomètre et de la Balance hydrostatique.*

293 Formation d'une table de pesanteurs spécifiques. 355
294 et 295. De l'aréomètre et de son usage. 357
296 et 297. De la balance hydrostatique et de son usage. 360
298. Problème d'Archimède. 361

IV. *Stabilité et oscillations des corps flottans.*

299 et 300. De l'équilibre stable; du métacentre, sa position et son usage. 362
301. Cause pour laquelle on leste les corps flottans. 366
302. Les positions successives d'équilibre d'un corps sont tour-à-tour stables et non stables. 367
303 et 304. Oscillations des corps flottans; longueur du pendule synchrone; applications. 368

CHAPITRE III. DES FLUIDES PESANS DE DENSITÉ VARIABLE.

I. *Des fluides hétérogènes pesans et incompressibles.*

305. Equilibre de fluides différens dans un syphon. 371
306 et 307. Pressions qu'ils exercent. 372

II. *Des fluides élastiques.*

308 et 309. Relations entre la pression, le volume et la densité. 372
310. Pression exercée en un lieu de la masse fluide. 374

III. *Du Baromètre.*

311 et 312. Forme, usage et explication du baromètre. 375
313. Cause du recoulement de l'eau à l'aide d'un syphon renversé. 377
314, 315 et 316. De l'emploi du baromètre à la mesure des hauteurs; formules de Deluc, Bouguer, Trembley et de Place. 378

IV. *Des Pompes.*

317, 318, 319 et 320. Des différentes sortes de pompes; explication du phénomène qu'elles présentent. 385
321. Effort qu'éprouve la puissance motrice. 388
322 et 323. Quantité de fluide que fournit une pompe à chaque coup de piston; ressort de l'air intérieur. 390
324. Cas où le fluide cesse de monter. 393
325 et 326. Les mêmes propositions lorsque la soupape dormante est noyée, ou dans le cas où le fluide est déja au-dessus de cette soupape. 393

LIVRE IV. *HYDRODYNAMIQUE.*

I. *Ecoulement des fluides incompressibles et pesans par des orifices horisontaux.*

327 et 328. Vîtesse du fluide qui s'écoule; pression en un lieu de la masse fluide, dans l'hypothèse du parallélisme des tranches. 396
329. Examen du cas où le vase se vide sans recevoir de nouvelle eau. 401
330, 331 et 332. Quantité de fluide écoulé, etc. 402

II. *De l'écoulement par de petits orifices.*

333 et 334. Lorsqu'un fluide s'écoule d'un vase par un orifice très-petit par rapport aux sections du vase, sa vîtesse d'écoulement est due à la hauteur du fluide dans le vase au-dessus de cet orifice, conséquences qui en résultent. 404
335. Relation entre la quantité de fluide écoulé, le tems de l'écoulement, la grandeur de l'orifice et la hauteur du fluide dans le vase; dans le cas où le vase est entretenu constamment plein. 406
336 et 337. Cas où le fluide s'écoule sans recevoir de nouvelle eau. 407
338 et 339. Théorie des clepsydres. 410
340. Contraction de la veine fluide. 412

NOTES SUR QUELQUES THEORIES.

I. Sur la composition des forces. 415
II. Sur les équations du mouvement. 421
III. Valeurs numériques de quelques quantités employées fréquemment en mécanique. 424
IV. Sur la résistance des milieux. 426
V. Problème des cordes vibrantes. 429
VI. Calcul des variations : applications. 438
Table des pesanteurs spécifiques de diverses substances. 457

Fin de la Table des matières.

TRAITÉ
DE
MÉCANIQUE ÉLÉMENTAIRE.

1. On dit qu'un corps est *solide*, lorsqu'il est composé * de parties ou molécules adhérentes les unes aux autres, c'est-à-dire, qu'on ne peut séparer sans effort. Les métaux, les pierres, etc. sont autant de corps solides. On appelle *fluide* toute substance composée de molécules peu adhérentes, et susceptibles d'obéir au plus léger effort : l'eau, l'air, etc. sont des fluides.

2. L'espace est une étendue considérée comme sans * bornes, immobile et pénétrable à la matière. C'est à cet espace, réel ou idéal, qu'on rapporte par la pensée la position des corps. Le mouvement est l'état d'un corps qui ne demeure pas constamment dans un même lieu, c'est-à-dire, qui n'est pas toujours à la même distance des divers points fixes de l'espace : cet état est opposé à celui du repos.

Ainsi concevons dans l'espace trois plans fixes ; si on a * déterminé la position d'un point par ses distances à ces plans, on dit que ce point est en mouvement, lorsqu'il ne conserve pas ces distances, et que dans deux instans successifs quelconques, les perpendiculaires abaissées de ce point sur les trois plans fixes changent de grandeur.

3. Un point en repos ne peut se donner aucun mou- *

vement, puisqu'il ne renferme pas en soi de raison pour se mouvoir dans un sens plutôt que dans un autre. La cause qui change l'état d'un corps, en le faisant passer ainsi du repos au mouvement, est ce qu'on appelle FORCE, ou PUISSANCE. Nous rencontrons à chaque instant l'occasion de remarquer cette action singulière ; les attractions, les chocs, la chute des corps produite par la pesanteur, les corps qui sont entrainés par le courant d'un fleuve, l'atôme léger emporté par les vents, et le boulet chassé du canon par la poudre enflammée, en sont autant d'exemples.

* Il n'est guère d'efforts qu'on n'ait tentés pour découvrir la nature des forces : mais ils ont tous été inutiles et nous ignorons complettement la cause de cette modification singulière, en vertu de laquelle la matière devient animée. Mais heureusement les principes de la mécanique ne sont nullement intéressés à cette découverte, et nous pouvons y renoncer sans regrets. Les forces ne nous importent que par les mouvemens qu'elles sont capables de produire ; leurs effets et les lois de leur action sont les seules choses que la mécanique envisage et calcule.

* 4. La DIRECTION d'une force est la droite suivant laquelle son action est exercée. Lorsqu'un corps est sollicité par une force quelconque et ensuite abandonné à lui-même, il suit constamment la direction de cette force, car il n'y a aucune raison pour qu'il s'écarte plutôt à droite qu'à gauche de sa direction primitive.

* 5. Il suit évidemment des principes que nous venons d'exposer que *deux forces qui agissent dans le même sens s'ajoutent l'une à l'autre*, et que *si elles agissent en sens contraire, le corps ne se meut qu'en vertu de leur différence ; ensorte qu'il resteroit en repos, si elles étoient égales.*

6. Outre la direction d'une force, on doit encore avoir égard à sa *grandeur* ou à son intensité : or comme les forces sont des choses d'une même espèce, en en prenant une quelconque pour unité, l'expression de toute force n'est plus qu'un rapport, ou une quantité mathématique, qui peut être représenté par des nombres ou par des lignes. Ainsi lorsque nous dirons qu'une force P est représentée par la ligne AB, il faudra concevoir que cette ligne est la direction même de la puissance, et que la longueur AB contient l'unité linéaire AE, autant de fois que la force P contient l'unité de force S; c'est-à-dire qu'on a $\frac{P}{S} = \frac{AB}{AE}$. Nous pouvons donc dire que $P = AB$, en prenant pour unité de force S, celle qui est représentée par l'unité linéaire AE. Fig. 1.

Pareillement lorsqu'on considère deux forces P et Q, et qu'on veut les représenter par des lignes, il suffit de prendre ces droites dans les directions mêmes des forces, et de déterminer sur ces lignes deux parties AB et AC qui soient entr'elles dans le même rapport que ces forces, de sorte qu'on ait $\frac{P}{Q} = \frac{AB}{AC}$. Fig. 2.

7. *Un point ne peut aller par plusieurs chemins à la fois.* Il suit de là que si plusieurs forces sollicitent un point matériel, ou elles se détruiront mutuellement, et on dit alors qu'il y a ÉQUILIBRE; ou le point se mouvra suivant une certaine direction, comme s'il n'obéissoit qu'à l'action d'une seule force. La force unique qui équivaut ainsi à toutes les puissances du *système* est appelée RÉSULTANTE; on nomme celles-ci ses COMPOSANTES.

Le problème de la *composition des forces* consiste donc à trouver la résultante d'un système donné de puissances; celui de la décomposition des forces en est l'inverse.

Fig. 2. Soient deux forces P et Q représentées par AB et AC, sollicitant une molécule A; par le premier problême on cherche leur résultante AR; par le second, au contraire, on cherche deux forces dont la résultante soit AR.

* 8. Rien n'est plus aisé que de produire l'équilibre dans un système de forces dont on connoît la résultante; car il ne s'agit que d'y introduire une nouvelle force égale et di-
Fig. 3. rectement opposée à cette résultante (5). Ainsi soient P, Q, S et T quatre forces, dont la résultante soit la force R; il est clair que si on introduit une nouvelle force R' égale et directement opposée à R, elle établira l'équilibre entre les forces P, Q, S et T puisqu'elle détruira leur résultante. Ainsi le problême général de l'équilibre est réduit à la recherche de la résultante.

* 9. La MÉCANIQUE est la science de l'équilibre et du mouvement; on la divise en quatre parties.

MÉCANIQUE PROPRE.

I. STATIQUE qui a pour objet l'équilibre
II. DYNAMIQUE qui a pour objet le mouvement
} des corps solides.

HYDRAULIQUE.

III. HYDROSTATIQUE qui a pour objet l'équilibre
IV. HYDRODYNAMIQUE qui a pour objet le mouvement
} des corps fluides.

Nous allons traiter en particulier chacune de ces quatre divisions.

LIVRE PREMIER.

STATIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE.

I. *Propositions générales.*

10. Le problème de la composition des forces, lorsqu'elles ont même direction, est renfermé dans ce qu'on a dit (5); car en considérant les forces deux à deux, il est facile d'en conclure que *plusieurs forces qui agissent suivant une même droite, équivalent à une seule égale à leur somme, si elles agissent toutes dans le même sens; ou égale à l'excès de la somme de celles qui agissent dans un sens, sur la somme de celles qui agissent en sens opposé.* Cet énoncé peut être simplifié par une considération particulière : car si on regarde les forces qui agissent dans un même sens comme positives, et celles qui agissent en sens opposé comme négatives, on pourra dire que *la résultante de plusieurs forces qui agissent suivant la même droite est égale à leur somme*, en prenant ici le mot *somme* dans le sens qu'on lui attribue en algèbre.

Lorsque les composantes ont des directions différentes, comme les forces P, Q, R, ..., (fig. 3), il est plus difficile d'obtenir leur résultante. Nous allons avant tout poser quelques principes qui serviront à cette recherche.

11. *Dans tout système de forme invariable, on peut prendre pour point d'application de chaque puissance,*

bre entr'elles, il est clair qu'on ne changera rien à l'état préexistant du système ; c'est-à-dire que si d'abord il y avoit équilibre, il subsistera encore après ; et que dans le cas contraire, la résultante sera la même. D'après cela, soient P, Q, R, ... des forces en équilibre, on pourra donc doubler, tripler, ... chacune d'elles sans détruire cet état. Il est facile de voir qu'on peut aussi prendre la moitié, le tiers, ... de chaque force sans altérer l'équilibre : car si, par exemple, les forces $\frac{1}{2}P$, $\frac{1}{2}Q$, $\frac{1}{2}R$, ... n'étoient pas en équilibre, elles auroient une résultante ; et les forces P, Q, R, ... équivaudroient à trois forces égales à cette résultante, et agissant dans le même sens ; ce qui est contre l'hypothèse. Ainsi en désignant par m un nombre quelconque, entier ou fractionnaire, les forces mP, mQ, mR, ... seront en équilibre lorsque les forces simples P, Q, R, ... seront dans cet état.

Et comme on peut regarder la force P comme égale et directement opposée à la résultante des forces Q, R, ... aussi bien que mP, par rapport à mQ, mR, ... on en conclut que *quand on fait varier dans le même rapport les grandeurs de plusieurs forces, qui agissent sur un point, leur résultante ne change pas de direction, et varie dans le même rapport.*

16. Il suit de là que la direction de la résultante de deux forces, fait avec ces forces des angles qui ne dépendent que du rapport entre ces forces, et non de leurs grandeurs absolues, puisque ces angles ne varient qu'avec ce rapport. Ainsi soit un point sollicité par deux forces P et Q, dont R soit la résultante : soit de même un autre point sollicité par les forces P' et Q', qui aient R' pour résultante ; il suit de ce qu'on vient de dire, que si les angles formés par les directions de P, Q et R sont res-

pectivement égaux à ceux que forment les directions de P', Q' et R', on a $\frac{P}{P'} = \frac{Q}{Q'} = \frac{R}{R'}$.

II. *Parallélogramme des forces.*

17. ***Deux forces égales ont pour résultante la diagonale du rhombe construit sur des droites qui représentent ces forces.***

Soit un rhombe $ABCD$; les diagonales AC, BD, se coupent à angle droit et en parties égales deux à deux : nommons α l'angle BAC; le triangle BAE donne $AE = AB \times \cos\alpha$; donc $AC = 2AB \times \cos\alpha$. Si donc on a deux forces égales P et Q représentées par AB et AD, il s'agit de prouver que leur résultante R est Fig. 6.

$$R = 2P\cos\alpha$$

quel que soit l'angle α.

1°. Supposons que cette proposition soit vraie pour deux forces égales quelconques dirigées suivant AP et AQ, dont la résultante soit dirigée suivant Ax, (12); je dis qu'elle doit avoir aussi lieu pour deux autres forces p et q dont les directions Ap et Aq diviseroient en deux parties égales les angles $PAx = QAx = \alpha$. En effet on peut substituer à la force p deux autres forces y et z inconnues et égales, dirigées suivant AP et Ax : on peut en dire autant pour la force q, et la remplacer par deux autres forces y' et z' suivant AQ et Ax : on aura alors au lieu des deux forces p et q les quatre puissances inconnues et égales, y, y', z et z', ou plutôt les trois forces y, y' et $2z$. Les deux premières étant égales et dirigées suivant AP et AQ, leur résultante sera par hypothèse $= 2y.\cos\alpha$; ainsi la résultante s de p et q sera Fig. 7.

$$s = 2z + 2y.\cos\alpha = 2y\,(1 + \cos\alpha).$$

* Cela posé, p et q forment avec Ax des angles égaux à ceux que y et z forment avec p ; on a donc (16), $\frac{x}{p} = \frac{p}{y}$, d'où $y = \frac{p^2}{x}$; en substituant ci-dessus on a $x = \frac{2p^2}{x}(1 + \cos\alpha)$, d'où. . . . . $x = p\sqrt{2}.\sqrt{1+\cos\alpha}$: or on sait (Trig. de Lacroix 26, 3°; Trig. de Legendre XX) que $2\cos^2(\frac{1}{2}\alpha) = 1+\cos\alpha$, donc

$$x = 2p.\cos(\tfrac{1}{2}\alpha).$$

* Il suit de là que si la proposition étoit démontrée pour deux forces dont les directions feroient avec celle de leur résultante un angle α, elle le seroit également dans le cas où cet angle seroit $\frac{1}{2}\alpha$, $\frac{1}{4}\alpha$, $\frac{1}{8}\alpha$ ..... Or le théorème est démontré (15) pour le cas où $\alpha = \frac{1}{3}.\frac{\pi}{2}$, (en désignant par π la circonférence qui a l'unité pour diamètre, notation que nous conserverons toujours dans la suite) donc il l'est aussi pour le cas ou $\alpha = \frac{1}{3}.\frac{\pi}{2^2}$, $= \frac{1}{3}.\frac{\pi}{2^3}$, ... ou en général $\alpha = \frac{1}{3}.\frac{\pi}{2^n}$, n désignant un nombre entier positif quelconque. Nous ferons, pour abréger, $\theta = \frac{1}{3}.\frac{\pi}{2^n}$.

* 2°. Si la proposition a lieu pour les trois angles α, C et $\alpha - C$, elle doit aussi avoir lieu pour l'angle $\alpha + C$. En effet soit l'angle $PAQ = 2.PAz = 2\alpha$; et les droites Ap, Aq, Ap' et Aq' faisant respectivement avec AQ et AP des angles $= C$. Concevons suivant ces quatre lignes des forces égales p, q, p' et q' ; la résultante des deux puissances p' et q' est une force P dirigée suivant

Fig. 8.

AP, et qui, par hypothèse, est $P = 2p.\cos\zeta$: de même p et q ont leur résultante $Q = P = 2p.\cos\zeta$. La résultante des deux forces P et Q, ou plutôt celle des quatre forces p, p', q et q' est dirigée suivant Az, et (par hypothèse) $= 2P.\cos\alpha$, ou si on veut, $= 4p.\cos\alpha.\cos\zeta$. Cela posé, la résultante z des deux forces p et p' est aussi dirigée suivant Az, ainsi que celle de q et q' qui d'ailleurs est, par hypothèse, $= 2p.\cos(\alpha - \zeta)$: donc la résultante des quatre forces p, p', q et q' est aussi $z + 2p\cos(\alpha - \zeta)$: en égalant ces deux valeurs, on trouve

$$z = 4p.\cos\alpha.\cos\zeta - 2p(\cos\alpha.\cos\zeta + \sin\alpha.\sin\zeta)$$
$$\text{ou } z = 2p(\cos\alpha.\cos\zeta - \sin\alpha.\sin\zeta) = 2p.\cos(\alpha + \zeta);$$

ce qu'il falloit démontrer.

Si on suppose que $\alpha = \zeta$, et est l'un des angles compris dans la valeur de θ ci-dessus ; le théorême sera démontré pour les angles α, ζ et $\alpha - \zeta = 0$, puisque dans ce dernier cas la résultante est évidemment la somme des composantes : donc il le sera également pour l'angle $\alpha + \zeta = 2\theta$. De même si on fait $\alpha = 2\theta$, et $\zeta = \theta$, la proposition sera vraie pour l'angle 3θ, puisqu'elle aura lieu pour α, ζ, et $\alpha - \zeta = \theta$: et ainsi de suite. On voit par là qu'en général le théorême est vrai pour deux forces qui font avec leur résultante un angle $= m\theta = \frac{1}{8}m.\frac{\pi}{2^n}$.

Or puisque m et n désignent ici des nombres entiers positifs quelconques, on peut les prendre aussi grands qu'on veut ; d'où il suit que parmi les angles compris dans cette formule on pourra toujours en trouver un qui approche autant qu'on voudra d'un angle donné.

3°. D'après cela, P et Q étant deux forces égales quelconques, leur résultante x sera la diagonale AR du rhom- Fig. 9.

be, lorsqu'on aura l'angle PAR compris dans la valeur $m\theta$: dans le cas contraire, la chose aura encore lieu. En effet on ne peut supposer x plus grand que cette diagonale, car soit $x = Ar$, concevons deux autres forces p et q égales aux premières et dont les directions fassent avec celles-ci un angle $m\theta$, et telles que leur résultante soit $AB < Ar$, et $> AR$: cela est toujours possible, puisqu'on peut prendre les directions des forces p et q aussi voisines qu'on veut de celles de P et Q : on peut donc faire ensorte qu'elles tombent dans l'angle PAQ, et que le pied D de la perpendiculaire pD soit à une distance de A moindre que $\frac{1}{2}.Ar$. Cela posé, comme les forces p et q forment un angle moindre que PAQ, leur résultante doit être plus grande (14) que celle des forces P et Q; d'où $AB > x$. Ainsi on ne peut avoir $x > AR$. On verroit de même qu'on ne peut supposer $x < AR$. Donc $x = AR$.

* 18. *Deux forces quelconques* P *et* Q *ont leur résultante* R
Fig. 10 et 11. *représentée par la diagonale* AR *du parallélogramme construit sur les droites* AP *et* AQ *qui les représentent.*

* 1°. *Supposons que les directions des forces* P *et* Q *sont à*
Fig. 10. *angle droit.* Si C est le milieu de la droite PQ, on a $PC = AC = CQ$, car le cercle décrit du centre C, et du rayon PC, doit passer en A et en Q. Menons DE parallèle à PQ; et PD, QE parallèles à AC. On a les angles PAD et PAC égaux, puisque le triangle PAC est isocèle; donc AP divise l'angle DAC en deux parties égales, et on peut substituer à la force P, deux autres forces AD et AC. De même aussi on mettra les puissances AC et AE au lieu de la force Q : les forces P et Q seront remplacées par quatre autres représentées par AD, AC, AE et AC; or AE et AD sont égales et opposées,

donc la résultante de P et Q sera $2.AC$. Prolongeons AC, et prenons $AC = CR$, AR sera la résultante cherchée. Or si on mène RP et RQ, la figure $APRQ$ sera un parallélogramme puisque les diagonales y seront coupées en parties égales. Donc, etc.

Désignons par θ l'angle PAR, nous aurons dans le * triangle PAR, $AP = AR \times \cos\theta$, ou en faisant la résultante $AR = R$

$$P = R\cos\theta \ldots\ (A).$$

Donc si on veut décomposer une force R en deux autres P et Q dont les directions soient perpendiculaires et données, *on aura pour la valeur de chaque composante le produit de la force* R, *par le cosinus de l'angle que sa direction forme avec celle de sa composante.*

2°. *Si les directions des forces* P *et* Q *forment un an-* * *gle quelconque*, achevons le parallélogramme $PAQR$; sa Fig. 12. diagonale est AR, à laquelle nous menons BC, DQ, et PF perpendiculaires; puis PB et QC parallèles. Les triangles égaux ABP, QDR donnent $DQ = AC = AB$, et $DR = BP = AF$; or si on substitue à P et Q les forces AB, AF, AC et AD, comme AB et AC sont égales et opposées, elles seront détruites, et la résultante sera simplement $AF + AD$ ou AR.

On voit même quelle partie de la résultante est due à * chaque force en particulier.

Cette proposition sert de fondement à toute la statique; * on la connoit sous le nom de parallélogramme des forces; elle consiste dans le théorême énoncé au commencement de ce paragraphe, les propositions précédentes n'en étant que des cas particuliers.

19. Les deux forces P et Q, et leur résultante R sont * donc en général représentées par les trois côtés du trian- Fig. 11.

gle APR ; or ces côtés ne jouissent de cette propriété que parce qu'ils sont proportionnels aux forces qu'ils représentent ; d'ailleurs ils sont entr'eux comme les sinus des angles qui leur sont opposés, dans le triangle APR ; et on a $\frac{P}{\sin.RAQ} = \frac{Q}{\sin.PAR} = \frac{R}{\sin.PAQ}$.....

Donc *lorsque trois forces sont en équilibre, chacune d'elles peut être représentée par le sinus de l'angle que forment entr'elles les directions des deux autres.*

III. *Des forces qui concourent en un même point.*

* 20. Pour déterminer la résultante de tant de forces qu'on voudra, quand elles concourent en un même point, on se servira du théorême précédent ; on composera ensemble deux de ces forces, et on leur substituera leur résultante ; on combinera de même celle-ci avec l'une des autres forces, et ainsi de suite. A chaque opération on aura une force de moins dans le système, et par là on réduira toutes les forces à une seule, qui sera nulle dans le cas d'équilibre. La même considération sert à trouver la résultante lorsque les forces sont dans le même plan et ne concourent pas en un même point ; il suffit alors de les prolonger deux à deux jusqu'en leur point de rencontre.

* Soient donc les forces P, Q, S, T représentées par Fig. 12. AB ; AC, AD, AE : en formant le parallélogramme $ABFC$, on aura la diagonale AF pour la résultante X de P et Q. De même AG sera la résultante de X et de S : enfin AH sera la résultante du système. Ainsi on établira l'équilibre (8) dans le système en y introduisant une force R égale et directement opposée à AH.

* 21. Il résulte de là une construction fort simple. Par

l'extrémité *B* de la droite *AB* qui représente la force *P*, menez la droite *BF* parallèle à la force *Q* et égale à la partie *AC* qui la représente : de même par le point *F*, menez la droite *FG* égale et parallèle à la force *S*; puis par le point *G*, *GH* égale et parallèle à la force *T*, vous formerez par là le polygone *ABFGH* : la droite *AH* qui ferme ce polygone représente la résultante cherchée ; et si, par la construction, le polygone se trouvoit fermé, alors l'équilibre existeroit dans le système. Cette construction a encore lieu lorsque les forces ne sont pas disposées dans le même plan, mais alors le polygone n'est point plan. Fig. 12 bis.

22. *Trois forces* P, Q *et* S *représentées par les trois arêtes* AB, AD *et* AC *qui forment l'un des angles triè-dres* A *d'un parallélipipède* ADIH, *ont leur résultante* R *représentée par sa diagonale* AI. Fig. 13. *

En effet la résultante des deux forces *P* et *S* est représentée par *AH*; on peut donc substituer la force *AH* à *P* et *S* : mais la diagonale *DI* est parallèle à *AH*, puisque *DI* et *AH* sont les intersections de deux plans parallèles *LM* et *BC* par un même plan, qui est celui des deux parallèles *AD* et *HI*. Si on compose ensemble les deux forces représentées par *AD* et *AH*, on aura donc pour la résultante des trois forces *P*, *Q* et *S*, une force *R* représentée par la diagonale *AI* du parallélipipède. *

On voit par là qu'on peut décomposer une force en trois autres dirigées suivant trois droites données qui concourent en un des points de sa direction. Si on a, par exemple, les trois droites *AP*, *AQ* et *AS*, et la force représentée par *AI*, on achevera le parallélipipède ; pour cela on mènera en *I* les trois plans *IC*, *LM*, et *LH* respectivement parallèles à ceux des droites données. Ces plans les couperont en trois points *B*, *C* et *D* qui détermineront *

les parties AD, AB, AC qui représenteront les composantes cherchées.

* On retrouve encore ici l'équation (A), car il est visible que dans le triangle ADI, rectangle en D, on a $AD = AI \times \cos DAI$.

* Il résulte du parallélogramme des forces et de la proposition précédente, que lorsqu'un système de forces agit sur un point matériel, on peut réduire ces puissances à deux ou trois autres parallèles à deux ou trois axes donnés : il sera donc toujours facile de déterminer par ce moyen la résultante du système. Imitons ce procédé analytiquement.

* 23. Prenons d'abord *le cas où les forces agissent dans* Fig. 14. *le même plan*. Menons par un point quelconque A pris dans ce plan, deux axes Ax et Ay perpendiculaires entr'eux ; puis décomposons chaque puissance en deux autres parallèles à ces lignes. Par exemple, soit l'une de ces forces représentée par BP' ; formons le rectangle $BDCP'$; cette force équivaudra à deux autres représentées par BD et BC parallèles à Ax et Ay ; et à l'aide de ce qu'on a dit (équation A) on a $BC = BP' \times \cos P'BC$, et $BD = BP' \times \cos P'BD$.

* Soient donc des puissances....., P', P'', ... dont les directions font avec AX des angles.. α', α'', ... les composantes parallèles à Ax seront $P' . \cos \alpha'$, $P'' \cos \alpha''$, ... ; et celles parallèles à Ay seront $P' \sin \alpha'$, $P'' \sin \alpha''$, ... ; or les premières équivalent à une force unique X égale à leur somme (10) ; de même les autres ont leur résultante Y égale à leur somme ; il n'y a donc plus à considérer que deux forces rectangulaires

$$X = P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + \text{etc.}$$
$$Y = P' \sin \alpha' + P'' \sin \alpha'' + \text{etc.}$$

Soit R la résultante du système, et α l'angle inconnu que sa direction fait avec Ax; d'après l'équation (A), ses composantes sont $R\cos\alpha$ et $R\sin\alpha$. Donc on a

$$R\cos\alpha = X,\ R\sin\alpha = Y \ldots\ldots (B).$$

Pour trouver R et α, lorsque X et Y sont donnés, ajoutons les quarrés de ces deux équations, comme $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, on en déduit

$$R = \sqrt{\{X^2 + Y^2\}} \ldots\ldots (C).$$

Les équations B donnent en outre

$$\cos\alpha = \frac{X}{R},\ \sin\alpha = \frac{Y}{R},\ \text{tang}\,\alpha = \frac{Y}{X} \ \ldots\ (D).$$

Ces équations servent à faire connoître la grandeur et la direction de la résultante : et il est facile de voir qu'elles expriment que R est la diagonale du rectangle construit sur X et Y, ce qui est d'ailleurs évident.

Toute droite qui passe par le point dont les coordonnées sont x' et y', et qui fait avec l'axe des x un angle α, a en général pour équation

$$y - y' = \text{tang}\,\alpha.(x - x'),$$

(Appl. de l'alg. à la géom. de *Lacroix*, 66; Traité des courbes du second degré de *Biot*, 15). On a donc pour équation de la direction de la résultante, en désignant par x' et y' les coordonnées du point d'application des forces,

$$X(y - y') = Y(x - x') \ldots\ldots (E).$$

Si le système est en équilibre, il est clair que cet état doit exister en particulier entre les composantes parallèles à chaque axe, puisque sans cela, le système auroit une

résultante; les équations qui expriment l'équilibre sont donc

$$\left.\begin{aligned} X = 0, \text{ ou } P'.\cos\alpha' + P''.\cos\alpha'' + \text{etc.} = 0 \\ Y = 0, \text{ ou } P'.\sin\alpha' + P''.\sin\alpha'' + \text{etc.} = 0 \end{aligned}\right\} \ldots (F).$$

Fig. 13. 24. Prenons maintenant *le cas où les puissances ont dans l'espace des directions quelconques.* Concevons par un point arbitraire dans l'espace trois droites AC, AB, AD rectangulaires entr'elles ; nommons AC *l'axe des* x, AB *l'axe des* y, et enfin AD *l'axe des* z. Le plan ABC, passant par les axes des y et des x, sera *le plan des* xy ; de même le plan BAD, qui passe par les axes des y et des z, sera le plan des yz ; enfin le plan DAC sera celui des xz. Pour fixer les idées, on peut supposer que les axes des x et des y sont horisontaux, et que l'axe des z est vertical ; le plan des xy sera alors horisontal, et les deux autres *plans coordonnés* seront verticaux. Nous conserverons dans la suite ces dénominations.

Cela posé soient des puissances.... P', P'', P''',.... dont les directions forment les angles suivans :

avec l'axe des x ..... α', α'', α''', ...

avec l'axe des y ..... ζ', ζ'', ζ''', ...

avec l'axe des z ..... γ', γ'', γ''', ...

En décomposant chacune de ces forces en trois autres (22), dont les directions soient parallèles aux axes, on a pour les composantes parallèles

aux x .... $P'.\cos\alpha'$, $P''.\cos\alpha''$, $P'''.\cos\alpha'''$, ...

aux y .... $P'.\cos\zeta'$, $P''.\cos\zeta''$, $P'''.\cos\zeta'''$, ...

aux z .... $P'.\cos\gamma'$, $P''.\cos\gamma''$, $P'''.\cos\gamma'''$, ...

Chacun de ces trois groupes de forces équivaut à une

puissance unique égale à leur somme, puisque ces composantes sont dirigées dans une même droite. Faisons usage de la notation précédente, et nommons X, Y et Z les trois forces parallèles respectivement aux x, y et z, nous aurons

$$X = P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + P''' \cos \alpha''' + \ldots$$
$$Y = P' \cos \zeta' + P'' \cos \zeta'' + P''' \cos \zeta''' + \ldots$$
$$Z = P' \cos \gamma' + P'' \cos \gamma'' + P''' \cos \gamma''' + \ldots$$

Soient α, ζ et γ les angles inconnus que forme la direction de la résultante R avec les trois axes ; $R \cos \alpha$, $R \cos \zeta$, $R \cos \gamma$ seront ses composantes dans les sens des axes ; on aura donc

$$R \cos \alpha = X, \; R \cos \zeta = Y, \; R \cos \gamma = Z \ldots (G).$$

Pour avoir la résultante et sa direction, ajoutons les quarrés de ces équations, nous aurons

$$R^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \zeta + \cos^2 \gamma) = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

Or on sait que (*)

$$\left.\begin{array}{l} \cos^2 \alpha + \cos^2 \zeta + \cos^2 \gamma = 1 \\ \text{Donc} \ldots \ldots \; R = \sqrt{\{ X^2 + Y^2 + Z^2 \}} \\ \text{d'ailleurs les équations } (G) \text{ donnent} \\ \cos \alpha = \frac{X}{R}, \cos \zeta = \frac{Y}{R}, \cos \gamma = \frac{Z}{R} \end{array}\right\} \ldots\ldots, (H),$$

(*) Cette équation exprime une relation qui existe entre les angles que forme une droite avec les trois axes ; voyez page 47 du Traité des courbes de *Biot*. Au reste voici une démonstration de ce théorême. Soit AI cette droite, et AC, AB, AD des parallèles aux axes des x, des y et des z : on a $AC = AI \times \cos \alpha$, $AB = AI \times \cos \beta$; or on a $AH = AI \times \cos IAH$; . . . . . $AC = AH \times \cos HAC = AI \times \cos IAH \times \cos HAC$, et Fig. 13.

Ces équations déterminent la résultante R et sa direction ; mais on peut observer qu'elles indiquent seulement qu'elle est la diagonale du parallélipipède construit sur X, Y et Z ; ce qui est évident.

Soient x', y' et z' les coordonnées du point d'application des forces ; les projections (*) de la résultante, sur les trois plans coordonnés passeront par celles de ce point ; les équations des projections de cette droite seront donc

$$y - y' = a\,(x - x') \ldots\ \text{sur le plan des } xy,$$
$$z - z' = b\,(x - x') \ldots\ \text{sur le plan des } xz,$$
$$b\,(y - y') = a\,(z - z') \ldots\ \text{sur le plan des } yz,$$

$AB = AH \times \sin HAC = AI \times \cos IAH \times \sin HAC$; donc en égalant entr'elles les deux valeurs de AC, ainsi que celles de AB ; on a

$$\cos\alpha = \cos IAH \times \cos HAC,\ \cos\beta = \cos IAH \times \sin HAC.$$

Ajoutant les quarrés de ces équations, on a donc . . . . . $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \cos^2 IAH$; mais $\cos^2 AIH = 1 - \sin^2 IAH = 1 - \cos^2\gamma$; donc $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

(*) On entend par *projection* d'un point sur un plan le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur le plan ; la projection d'une ligne est la suite des projections de ses divers points ; s'il s'agit d'une droite, le système des perpendiculaires forme un plan, dont l'intersection avec le plan de projection est une droite ; la projection d'une ligne droite est donc une autre droite déterminée par les projections de deux quelconques de ses points. Ainsi dans la fig. 13, le point I est projetté en H, L et M sur les trois plans BAC, BAD, et CAD ; de même AH est la projection sur le premier de ces plans de la droite AI, dont AC, AB et AD sont les projections sur les axes AP, AS et AQ. Voyez à cet égard les Leçons de *Monge* à l'Ecole normale, le Complément de géométrie de *Lacroix*, et le Traité des courbes du second degré de *Biot*.

a et b étant les tangentes des angles que forme l'axe des z avec ces projections respectives : ainsi menons par le point A, auquel les forces sont appliquées, les lignes AB, AC Fig. 13. et AD, parallèles aux axes des y, des x et des z, et représentons la résultante R par AI : sa projection sur le plan BAC, parallèle à celui des xy, sera AH, ainsi a sera la tangente de l'angle HAC ; or le triangle HAC donne $\text{tang}.HAC = \frac{HC}{AC} = \frac{R\cos\zeta}{R\cos\alpha} = \frac{Y}{X}$: donc $a = \frac{Y}{X}$; on trouveroit de même $b = \frac{Z}{X}$. Les équations des projections sont donc

$$\left.\begin{aligned} X(y-y') &= Y(x-x') \\ X(z-z') &= Z(x-x') \\ Z(y-y') &= Y(z-z') \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (I).$$

l'une d'elles est comportée par les deux autres.

Si ce système est en équilibre, il est clair que cet état doit avoir lieu en particulier entre chacun des groupes de forces parallèles aux axes ; ainsi les équations d'équilibre sont

$$X = 0,\ Y = 0,\ Z = 0 \ldots\ldots (J).$$

Tout ce qui a été dit dans le numéro précédent n'est qu'un cas particulier du problème que nous venons de traiter ; car si les forces sont dans le plan xy, elles forment des angles droits avec l'axe des z, et on a $\cos\gamma' = 0$, $\cos\gamma'' = 0$, ... : d'où $Z = 0$, et $\cos^2\alpha + \cos^2\zeta = 1$, ou $\sin\alpha = \cos\zeta$. Les équations (H), (I) et (J) deviennent donc (D), (E) et (F).

25. Si les deux équations (C) n'avoient pas lieu à-la-fois, il n'y auroit pas équilibre dans le système ; si on avoit seulement $X = 0$, on auroit $R.\cos\alpha = 0$, et par

conséquent $\cos\alpha = 0$, ou $\alpha = \frac{1}{2}\pi$: donc la résultante feroit avec l'axe des x un angle droit, et seroit parallèle à l'axe des y; de même si on avoit seulement $Y = 0$, la résultante seroit parallèle aux x.

On peut faire le même raisonnement pour les trois équations (H) ; si on avoit seulement $X = 0$, on en concluroit que $\cos\alpha = 0$, ce qui désigneroit que la résultante est située dans un plan perpendiculaire à l'axe des x : si on avoit à-la-fois $X = 0$, $Y = 0$, il seroit de même aisé de voir que la résultante seroit parallèle à l'axe des z.

26. Quant aux signes que doivent avoir les composantes $P'\cos\alpha'$, $P''\cos\alpha''$, ... dans les équations précédentes, ils dépendent de la direction et du sens dans lequel chaque force agit : pour les déterminer, il suffira d'observer ce qu'on a dit (10); car il est clair qu'ici il faudroit soustraire celles de ces composantes qui agissent dans des sens directement opposés aux autres. Nous pouvons donc conclure de là que *l'on peut regarder comme positives toutes les composantes dans le sens d'un des axes lorsqu'elles tendent à augmenter la coordonnée du point sollicité par rapport à cet axe ; pourvu qu'on prenne négativement les composantes qui tendent à diminuer cette même coordonnée.*

Il y a un autre moyen de déterminer les signes, qui revient au précédent, mais qui paroîtra peut-être plus analytique ; voici en quoi il consiste. Concevons
Fig. 15. que du centre M, auquel les forces sont appliquées, on a décrit le cercle $BDEF$, et mené les droites EB, DF parallèles aux axes Ax et Ay. En prenant le point B pour origine des arcs, toute droite qui, telle que MP ou MQ, tombe en dessus de EB, fait avec cette ligne un angle dont le sinus est positif ; tandis que ce sinus est négatif pour les lignes MS, et MT qui tombent en dessous. Pa-

reillement les lignes qui sont à droite de DF, forment avec EB des angles dont les cosinus sont négatifs, tandis que celles qui sont à gauche ont les cosinus positifs. On conclut de là que les produits $P \sin \alpha$ seront positifs ou négatifs avec $\sin \alpha$, c'est-à-dire suivant que la force P tombera au-dessus ou au-dessous de EB : de même $P \cos \alpha$ sera positif ou négatif suivant que P sera disposé à droite ou à gauche de DF. Mais pour n'avoir ainsi égard qu'aux directions de P', P'', etc., nous supposerons alors que toutes ces forces tirent le point matériel M dans les sens de leurs directions respectives, ou que toutes le poussent : cette hypothèse est permise dans tous les cas, puisque si pour une puissance, en particulier, il en étoit autrement, il suffiroit de l'appliquer sur son prolongement et en sens opposé. Cette manière d'envisager la question revient visiblement à la première ; on voit que les composantes de la force P sont positives ; que celles de la force S sont négatives ; et qu'enfin les forces Q et T ont l'une de leurs composantes positive et l'autre négative.

27. On tire des deux équations (B) une conséquence remarquable. Prenons dans le plan des forces un point arbitraire S, et menons au point d'application M la droite $MS = s$; soit θ l'angle qu'elle forme avec l'axe des x. En multipliant la première des équations (B) par $s.\sin\theta$, et la seconde par $s.\cos\theta$ on a

Fig. 16.

$$R s.\cos\alpha.\sin\theta = P' s.\cos\alpha'\sin\theta + P'' s.\cos\alpha''.\sin\theta + \text{etc.}$$
$$R s.\sin\alpha.\cos\theta = P' s.\sin\alpha'\cos\theta + P'' s.\sin\alpha''.\cos\theta + \text{etc.}$$

Si on soustrait la première de la seconde, en observant que $\sin(\alpha - \theta) = \sin\alpha.\cos\theta - \sin\theta.\cos\alpha$, on a

$$R s.\sin(\alpha - \theta) = P' s.\sin(\alpha' - \theta) + P'' s.\sin(\alpha'' - \theta) + \text{etc.}$$

Cela posé représentons la force R par MR, l'angle $\alpha - \theta$

sera formé par MR et MS ; or si du point S on abaisse Sa perpendiculaire sur MR, on aura dans le triangle SMa, $Sa = s.\sin(\alpha - \phi) = r$. On en fera autant pour les autres forces ; nommant r, p', p'', ... les perpendiculaires abaissées de S sur les directions de R, P', P'', ... les divers termes de l'équation précédente deviendront Rr, $P'p'$, $P''p''$, ... et on aura

$$Rr = P'p' + P''p'' + \text{etc.....} \quad (K).$$

* On est convenu d'appeler MOMENT d'une puissance le produit de sa grandeur par sa distance à un point fixe ; ainsi l'équation (K) désigne que *le moment de la résultante est égal à la somme des momens des composantes.*

* 28. On doit entendre ici par *somme des momens*, les produits $P'p'$, $P''p''$, ... chacun pris avec son signe : ce signe ne dépend que de la direction des puissances, c'est-à-dire, de p', p'', ... puisque les forces sont supposées tirer toutes à-la-fois le point matériel M. Or l'équation $p' = s.\sin(\alpha' - \phi)$ indique, que suivant que $\sin(\alpha' - \phi)$ sera positif ou négatif, le moment $P'p'$ aura le signe + ou le signe — : il en est de même des autres forces. On conclut de là, et de la manière dont on détermine les signes des sinus, que toute force qui tombe d'un côté de la droite MS a son moment positif, tandis qu'on doit regarder comme négatif, le moment d'une puissance qui est disposée de l'autre côté : en supposant toutes fois que toutes les forces tirent le point M, ou, si on veut, qu'elles le poussent toutes (26). Les pieds des perpendiculaires, tels que p', sont d'ailleurs tous sur la circonférence d'un cercle décrit sur SM comme diamètre.

Ainsi $P'p'$, $P''p''$, $P'''p'''$ seront ici négatifs, $P^{IV}p^{IV}$, $P^{V}p^{V}$, $P^{VI}p^{VI}$ seront positifs ; ou réciproquement. Or observons que si on considère le point S comme fixe, et les

droites Sp', Sp'', ... comme des verges rigides, l'action de chacune des forces sur le point M ne peut être que de le faire tourner autour de S : de plus les momens positifs appartiennent aux forces qui tendent à faire tourner dans un sens, tandis que les momens négatifs sont relatifs aux forces qui tendent à faire tourner en sens contraire : on conclut de là que l'équation (K) peut s'énoncer ainsi : *lorsqu'on a plusieurs forces appliquées à un point matériel, et disposées dans un même plan, le moment de la résultante est égal à l'excès de la somme des momens des forces qui tendent à faire tourner dans un sens, sur celle des momens des forces qui tendent à faire tourner en sens contraire, autour de l'origine des momens.* Mais on remarquera que l'idée de *rotation* qui est introduite ici n'est pas nécessairement liée au principe précédent : le mouvement n'est ici que de pure commodité pour déterminer les signes et ne fait pas partie nécessaire de ce principe.

29. L'équation (K) devient

$$P'p' + P''p'' \text{ etc.} = 0$$

dans le cas de $Rr = o$; c'est-à-dire 1°. lorsque $R = o$, ou que le système est en équilibre ; et, 2°. lorsque $r = o$, ou que l'origine des momens est prise sur la direction même de la résultante. Ainsi *la somme des momens des forces qui tendent à faire tourner dans un sens, est égale à la somme des momens des forces qui tendent à faire tourner en sens contraire ; 1°. quand il y a équilibre ; 2°. lorsque l'origine des momens est prise sur la direction de la résultante.* En général, s'il y avoit quelque force dont la direction passât par l'origine S des momens, son moment seroit nul.

Nous ferons voir par la suite (36, 39, 42 et 45) que le théorème des momens n'est d'ailleurs d'aucune utilité particu-

lière, et n'est qu'une partie de la théorie générale de l'équilibre. On trouve dans les trois dimensions un théorème analogue à celui que nous venons de démontrer, mais nous ne nous y arrêterons pas, parce qu'il n'est d'aucune application.

IV. *Des forces parallèles.*

* 50. Soient deux forces parallèles p et q, agissant dans le
Fig. 18. même sens, et appliquées aux deux extrémités E et F de la ligne EF: il est clair qu'on ne changera rien à l'état du système si on y introduit deux nouvelles forces p' et q' égales, opposées et agissant dans la direction de la ligne EF, quelles que soient d'ailleurs les grandeurs de ces forces. En formant les parallélogrammes $pPp'E$ et $qQq'F$, on voit que la résultante P des deux forces p et p' est représentée par PE; et que celle Q des deux forces q et q' l'est par FQ. La résultante de p et q sera donc la même que celle des deux forces P et Q, qui concourent au même point A: par ce point menons AO et BC parallèles à p et à EF.

* Cela posé, pour trouver la résultante de P et Q, concevons ces deux forces appliquées en A, et décomposons la puissance P en deux autres dirigées suivant AB et AO: la première sera p', la seconde sera p, puisque les circonstances de la décomposition de P sont les mêmes en A qu'en E: de même décomposons Q en q' et q, agissant suivant AC et AO. Les deux forces q' et p' égales, par hypothèse, se détruisent : la résultante de p et q est donc $= p + q$, agit suivant AO, c'est-à-dire, parallèlement aux composantes.

* Déterminons maintenant le point O par lequel passe cette résultante : les triangles semblables PpE et EOA donnent

$\frac{Pp}{pE}$ ou $\frac{p'}{p} = \frac{EO}{AO}$, d'où $p' = \frac{EO}{AO} \times p$. De même, les triangles semblables QFq et OFA donnent.....

$q' = \frac{OF}{AO} \times q$. Or $p' = q'$, donc $p \times EO = q \times OF$;

ainsi le point O d'application de la résultante, divise la droite EF en parties réciproquement proportionnelles aux composantes : et si les forces p et q étoient égales, le point O seroit placé au milieu de EF.

Il suit de là que *la résultante de deux forces parallèles, agit dans le même sens, est égale à leur somme, et divise la droite d'application en deux parties réciproquement proportionnelles aux composantes.*

31. D'après cela, proposons nous de mettre en équilibre deux forces parallèles P et Q; on mènera dans leur plan une droite quelconque EG; la résultante R coupera cette droite en deux parties réciproques aux forces : soit $EF = p$ et $FG = q$, on aura $Pp = Qq$. Mais cette équation ne suffit pas pour trouver le point F, puisqu'elle contient deux inconnues p et q. Or la longueur de la droite GE est donnée, soit $GE = a$, on a $p + q = a$. En éliminant entre les deux équations $Pp = Qq$, et $p + q = a$, on trouve Fig. 19.

$$p = \frac{aQ}{P+Q} = \frac{aQ}{R}, \quad q = \frac{aP}{P+Q} = \frac{aP}{R} \quad \ldots\ldots (L),$$

Après avoir déterminé ainsi le point F, on y appliquera un appui fixe, ou une force S égale à la somme $P + Q$ des forces, qui leur soit parallèle et agisse en sens contraire, et le système sera en équilibre.

32. Les trois forces P, Q et S étant ainsi disposées, la force Q peut être regardée comme destinée à produire l'équilibre entre les puissances P et S; et comme, Fig. 19.

$S = P + Q$, on a $Q = S - P$; d'où il suit que la résultante de deux forces parallèles qui agissent en sens contraire, est égale à la différence des composantes, agit dans le sens de la plus grande des deux, et on a son point d'application G, qui est placé du côté de celle-ci, de sorte que

$$EG = a = \frac{S}{Q} \times p = \frac{Sp}{S - P}.$$

Les théorèmes précédens s'appliquent donc encore au cas où les forces agissent dans des sens opposés, pourvu qu'on considère ces forces comme affectées de signes contraires.

Si les forces P et S étoient égales, on auroit $Q = o$, et $a = \infty$, ce qui veut dire que pour produire l'équilibre, il faut appliquer une force nulle, à une distance infinie: comme ce résultat est impossible à exécuter, on voit qu'une force unique ne peut dans ce cas établir l'équilibre.

* 33. On pourroit aussi se proposer de trouver les efforts Fig. 19. qu'exerce en deux points donnés E et G d'une droite EG, une puissance R appliquée en F: il est clair qu'il ne s'agit pour résoudre ce problème que de trouver deux forces P et Q, qui seroient appliquées en E et G, et équivaudroient à la force R; c'est-à-dire, qu'il faut décomposer la force R en deux autres qui lui soient parallèles et qui agissent en E et G: soit $EF = p$, $FG = q$ et $GE = a$; on a encore ici $Pp = Qq$, et $R = P + Q$; P et Q sont inconnus; a, p, q et R sont donnés. En éliminant entre ces deux équations, on obtient aisément

$$Q = \frac{p}{a} \times R = \frac{p}{p+q} \times R,\ P = \frac{q}{a} \times R = \frac{q}{p+q} \times R \ldots (M).$$

* 34. Soient P et Q deux forces parallèles, et leur résul- Fig. 20. tante R; d'un point quelconque A de leur plan, menons la droite AD perpendiculaire à leurs directions, et regar-

dons les points B, D et C comme ceux où les forces sont appliquées; on aura $P \times BC = Q \times DC$, et $R = P + Q$; donc $R \times AC = P \times AC + Q \times AC$; or..... $AC = BC + AB = AD - DC$, donc en substituant $R \times AC = P \times AB + Q \times AD$. En appelant p, q et r les perpendiculaires abaissées du point A sur les directions de P, Q et R, on a donc

$$Rr = Pp + Qq \ldots\ldots\ldots\ldots (N).$$

On observera que tout ce que nous venons de dire pour la ligne AD, menée à angle droit sur les directions des forces, a encore lieu pour toute autre ligne AG, menée d'une manière quelconque, c'est-à-dire qu'on a

$$R \times AF = P \times AE + Q \times AG:$$

cela résulte de ce que le théorême du n°. 30 a lieu, quelles que soient les directions des forces par rapport à la ligne sur laquelle sont situés leurs points d'application.

Prenons maintenant les momens par rapport à un point A', placé au dedans de l'espace renfermé par les droites BP et DQ. On a encore ici $R \times A'C = P \times A'C + Q \times A'C$: mais comme $A'C = A'D - CD = BC - A'B$, on obtient, en substituant, $R \times A'C = Q \times A'D - P \times A'B$, c'est-à-dire qu'en faisant usage de la notation précédente, on a $Rr = Qq - Pp$: et on observe qu'alors la résultante de P et Q est placée entre l'origine A' des momens, et la force Q dont le moment est positif.

Il suit de là qu'en général *le moment de la résultante de deux forces parallèles, par rapport à un des points quelconque de leur plan, est égal à la somme des momens de ces forces;* pourvu que chaque produit soit pris avec son signe: on attribuera donc des signes contraires aux perpendiculaires qui, partant de l'origine des momens, seroient dirigées dans des sens contraires. De là, et de ce qu'on a

vu (32), que les forces qui agissent en sens opposés ont des signes contraires, l'on conclut que les conséquences énoncées pages 24, 25, sont encore applicables ici; et qu'en considérant l'origine comme fixe, et les perpendiculaires comme des verges rigides, on devra attribuer des signes positifs ou négatifs aux momens, suivant qu'ils appartiendront à des forces qui tendront à faire tourner dans un sens ou en sens contraire : mais on n'oubliera pas que le mouvement introduit ici n'est que de pure commodité pour déterminer les signes.

* 35. Prenons maintenant un système quelconque de forces
Fig. 21. parallèles P', P'', P''',... appliquées dans l'espace aux divers points d'un corps; désignons par x', y', z'; $x'', y'' z''$;..., les coordonnées respectives de ces points. Soient Ax, Ay et Az les axes des x, des y et des z; soient aussi D et K les points d'application des forces P' et P''; on a

$$AB = x', BC = y', CD = z'; AH = x'', HI = y'', \text{et } IK = z''.$$

Cela posé soit R' la résultante de P' et P''; prenons sur DK un point G pour lequel on ait $P' \times DG = P'' \times KG$, G sera (30) le point d'application de R': nommons a', b', c' les coordonnées de ce point, de sorte que $AE = a'$, $EF = b'$, $GF = c'$. Les lignes CF et FI étant proportionnelles à DG et GK d'une part, et à BE et EH de l'autre, on a $P' \times BE = P'' \times EH$; or $R' = P' + P''$ donne

$$R' \times AE = (P' + P'') \times AE = P' \times (AB + BE) + P'' \times (AH - HE).$$

donc $R'a' = P'x' + P''x''$. On raisonnera de même par rapport aux axes des y et des z; donc on a

$$R' = P' + P'' \qquad R'a' = P'x' + P''x''$$
$$R'b' = P'y' + P''y'', \quad R'c' = P'z' + P''z''.$$

Composons maintenant la force R' (qui remplace P' et P'') avec la force P'''; on aura de même

$$R'' = R' + P''', \quad R''a'' = R'a' + P'''x'''$$
$$R''b'' = R'b' + P'''y''', \quad R''c'' = R'c' + P'''z'''$$

substituant pour R', $R'a'$, $R'b'$, $R'c'$ leurs valeurs, on obtient celles de R'', $R''a''$, $R''b''$, $R''c''$. On peut continuer ce raisonnement autant qu'il est nécessaire, et il est visible que pour déterminer la résultante R et sa position, on aura les équations

$$\left.\begin{array}{l} R = P' + P'' + \text{etc.}, \quad Rx = P'x' + P''x'' + \text{etc.} \\ Ry = P'y' + P''y'' + \text{etc.}, \quad Rz = P'z' + P''z'' + \text{etc.} \end{array}\right\} \ldots (O).$$

on doit toujours observer de prendre négativement les forces et les coordonnées dirigées en sens contraire de celles qu'on regarde comme positives. La première de ces équations détermine la grandeur de la résultante; et son point d'application a pour coordonnées

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{P'x' + P''x'' + \text{etc.}}{P' + P'' + \text{etc.}} \\ y = \dfrac{P'y' + P''y'' + \text{etc.}}{P' + P'' + \text{etc.}} \\ z = \dfrac{P'z' + P''z'' + \text{etc.}}{P' + P'' + \text{etc.}} \end{array}\right\} \ldots\ldots (P).$$

36. Si le plan des xy a été pris perpendiculaire aux directions des forces, chacune d'elles est projettée sur ce plan en un point; les x et les y désignent leurs distances respectives aux plans des yz et des xz, auxquelles elles sont parallèles : Rx, $P'x'$, $P''x''$... Sont donc les momens des forces R, P', P'',... par rapport au plan des yz; de même $Ry, P'y', P''y''$,... sont leurs momens par rapport au plan des xz. Ainsi *la résultante d'un système de forces paral-*

lèles est parallèle à ces forces, et égale à leur somme; son moment, par rapport à tout plan parallèle à leurs directions, est égal à la somme des momens des composantes. Bien entendu que les signes doivent toujours être déterminés d'après les considérations exposées (34).

* Ce théorême sert à faire connoître la grandeur, la direction et la position de la résultante; car il suffit de prendre les momens des composantes par rapport à deux plans parallèles, pour en conclure la distance de la résultante à ces plans.

* Si toutes les forces étoient disposées dans un même plan, qu'on pourroit prendre pour celui des xy, on auroit alors $z'=0$, $z''=0$,.... et par conséquent $z=0$; ainsi la résultante est située dans le plan des forces, et les équations se réduisent alors à

$$\left.\begin{array}{c} R=P'+P''+\text{etc.} \\ Rx=P'x'+P''x''+\text{etc.},\quad Ry=P'y'+P''y''+\text{etc.} \end{array}\right\}\cdots(Q)$$

et on a pour les coordonnées du point d'application

$$x=\frac{P'x'+P''x''+\text{etc.}}{P'+P''+\text{etc.}},\quad y=\frac{P'y'+P''y''+\text{etc.}}{P'+P''+\text{etc.}}\cdots(R).$$

* 37. Les équations (P) étant indépendantes des directions des forces, il est évident que le point qui a pour coordonnées x, y, z doit rester le même, lorsqu'on fait prendre aux forces d'autres directions parallèles, pourvu qu'on ne change pas leurs points d'application. Il s'ensuit que dans tout système de forces parallèles, il existe un point indépendant de leurs directions communes; ce point, dont les valeurs (P) donnent les coordonnées, a été nommé *centre des forces parallèles*. On observe en outre que ce centre est unique dans le système, et qu'il ne varie pas lorsqu'on fait varier proportionnellement les forces, et

qu'on substitue nP'', nP'',... à P', P'',... puisque cela revient à multiplier les deux termes de chaque fraction par n.

Lorsque les forces sont disposées dans un même plan, le centre des forces est dans ce plan, et ses coordonnées sont les valeurs (R). Il seroit également facile de voir que lorsque les points d'application des forces sont sur une même droite, le centre des forces est sur cette droite.

38. Lorsque le système contient des forces qui agissent dans des sens opposés, tout ce qu'on vient de dire s'applique à ce cas, en déterminant convenablement les signes; mais il peut arriver une circonstance remarquable. Si on cherche les résultantes de chacun des groupes de forces qui agissent dans un même sens, on n'aura plus que deux puissances opposées, qui devront être affectées de signes contraires : or, si ces puissances sont égales, on a $P' + P'' + \text{etc.} = 0$, ou $R = 0$: alors, si elles ne sont pas dirigées dans la même ligne, on retombe dans le cas traité n°. 32. Mais si ces forces sont directement opposées, l'équilibre existe dans le système; et comme on a alors $R = 0$, sans que x, y et z soient infinis, les formules (O) deviennent

$$\left.\begin{array}{l} P' + P'' + \text{etc.} = 0,\quad P'x' + P''x'' + \text{etc.} = 0 \\ P'y' + P''y'' + \text{etc.} = 0,\quad P'z' + P''z'' + \text{etc.} = 0 \end{array}\right\} \ldots (S).$$

Ce sont les équations d'équilibre d'un système de forces parallèles.

V. *Des forces de directions quelconques agissant sur un système de forme invariable.*

39. Concevons un système de forces quelconques, et assignons à leurs grandeurs et à leurs directions les mêmes dénominations qu'au n°. 24; c'est-à-dire désignons les

forces par P', P''....; nommons α', ζ', γ', les angles formés par la direction de la force P' avec les axes des x, des y et des z; de même α'', ζ'', γ'', pour la force P'', et ainsi des autres puissances. Mais ici les forces n'étant pas supposées concourir en un même point, la position de chacune doit être en outre déterminée par celle d'un des points de sa direction, tel que son point d'application au système. Soient donc x', y', z'; x'', y'', z'',.... les coordonnées des points d'application des forces P', P''....

Supposons d'abord que l'équilibre a lieu, et que cet état est produit, parce qu'il existe dans le système un point fixe qui détruit l'action des puissances; il est clair qu'elles doivent pouvoir être réduites à d'autres qui passent par ce point, que nous supposerons être l'origine des coordonnées. Exprimons analytiquement cette condition.

Décomposons chaque force, au point même où elle est appliquée, en trois autres respectivement parallèles aux x, aux y et aux z; soient X', Y' et Z' les trois composantes de P'; de même soient X'', Y'', Z'' les composantes de P'', etc..... c'est-à-dire faisons

$$P' \cos \alpha' = X'; \quad P'' \cos \alpha'' = X''; \text{ etc.}$$
$$P' \cos \zeta' = Y'; \quad P'' \cos \zeta'' = Y''; \text{ etc.}$$
$$P' \cos \gamma' = Z'; \quad P'' \cos \gamma'' = Z''; \text{ etc.}$$

D'après les principes développés dans le chapitre qui précède, il est facile de réduire tout le système à trois forces, X, Y et Z parallèles aux axes; car, par exemple, les forces X', X'',.... équivalent à une seule X égale à leur somme, parallèle aux x, et dont le moment, par rapport aux plans xy et xz, est égal à la somme de leurs momens. Il en est de même des forces Y', Y'',...; Z', Z''...

Fig. 22. Soit yAx le plan xy sur lequel les forces X, Y et Z sont projettées en CX, HY et F: en désignant par m et n

les coordonnées, dans le sens des z, des points d'application des forces X et Y, on a

$$\left.\begin{array}{ll} X\times CB=X'y'+X''y''+\text{etc.}; & Xm=X'z'+X''z''+\text{etc.} \\ Y\times DH=Y'x'+Y''x''+\text{etc.}; & Yn=Y'z'+Y''z''+\text{etc.} \\ Z\times DF=Z'x'+Z''x''+\text{etc.}; & Z\times FB=Z'y'+Z''y''+\text{etc.} \end{array}\right\}\ldots(1).$$

Concevons que par la direction de X et par l'axe des x, on a fait passer un plan qui rencontre la force Z en un point, que nous regarderons comme celui où la puissance Z est appliquée; ce point a p pour ordonnée dans le sens des z, et est projetté en F. Décomposons dans ce plan la force X en deux autres qui lui soient parallèles; l'une agissant suivant Ax (elle sera détruite par le point fixe A), et l'autre ξ projettée en $F\xi$. On aura visiblement les équations

$$X\times CB=\xi\times BF,\ Xm=\xi p\ldots.\ (2).$$

La force Y peut de même être décomposée en deux autres, l'une dirigée suivant Ay, et détruite par le point fixe A, et l'autre χ projettée en $F\chi$. Et comme les forces Z, ξ et χ doivent être réductibles à une force dirigée vers le point A, d'après la nature du problème; il s'ensuit visiblement que les forces ξ et χ doivent être appliquées au même point de la direction de Z, qui a p pour ordonnée dans le sens des z: ainsi on a les deux équations

$$Y\times DH=\chi\times DF,\ Yn=\chi p\ldots.\ (3).$$

La résultante des forces ξ, χ et Z a pour équations de sa direction les valeurs (I) n°. 24; or, pour que cette résultante passe par l'origine, il faut qu'on ait en même tems $x=0$, $y=0$ et $z=0$: cette condition introduite dans les valeurs (I) donne ici (*)

(*) On peut encore déduire les équations (4) par une considération assez simple : en effet il est clair que si la résultante des

$\xi \times BF = \chi \times DF$, $\xi p = Z \times DF$, $Z \times BF = \chi p$...(4).

En éliminant ξ et χ entre les équations 2, 3 et 4, on obtient

$$X \times CB = Y \times DH,\ Xm = Z \times DF,\ Z \times BF = Yn;$$

et à l'aide des expressions (1), on a enfin pour les équations d'équilibre d'un système autour de l'origine fixe

$$\left.\begin{aligned} &X'y' + X''y'' + \text{etc.} - (Y'x' + Y''x'' + \text{etc.}) = 0 \\ &X'z' + X''z'' + \text{etc.} - (Z'x' + Z''x'' + \text{etc.}) = 0 \\ &Z'y' + Z''y'' + \text{etc.} - (Y'z' + Y''z'' + \text{etc.}) = 0 \end{aligned}\right\} \ldots (T).$$

La première de ces équations indique que *la différence des momens, par rapport à l'axe des* z, *des composantes parallèles aux* x *et aux* y, *est nulle.* Les deux autres équations fournissent des conséquences analogues relativement aux autres axes.

Ces équations s'énoncent encore d'une autre manière; observons que $X'y'$ est le moment de la projection sur le plan xy, de la force X', par rapport à l'axe des x; de même, $Y'x'$ est le moment de la projection sur le même plan de la force Y' relativement à l'axe des y : donc, par le théorême des momens (27), X' et Y' étant les composantes de la projection de P' sur ce plan, $X'y' - Y'x'$ est le moment, par rapport à l'axe des z, de la résultante de X' et Y', c'est-à-dire de la composante de P', prise dans un plan perpendiculaire à l'axe des z. Les deux autres équations fournissent des conséquences analogues par rapport

---

forces ξ, χ et Z passe par le point A, et se projette suivant AFG, en construisant un parallélipipède sur la droite menée de A au point d'application de ces trois forces, il sera semblable à celui qui donne leur résultante ; il résulte de cette similitude des proportions qui conduisent aux équations (4).

aux y et aux x. Donc *la somme des momens par rapport à l'un des axes, des composantes prises dans des plans perpendiculaires à cet axe, est nulle.*

40. Nous avons supposé, dans ce qui vient d'être dit, que le système étoit invariablement fixé à un point, de sorte que les équations (T) expriment seulement que le système ne peut tourner autour de ce point. Au lieu de supposer que l'origine est fixe, on peut la supposer retenue par des puissances qu'on concevra réduites à trois, respectivement parallèles à chaque axe. Or, il résulte des décompositions précédentes, que celle qui agit dans le sens des x, est la résultante des forces X', X''... et par conséquent est égale à leur somme; on en dira autant par rapport aux autres axes : de sorte que $X = X' + X'' + \text{etc.}$, $Y = Y' + Y'' + \text{etc.}$, $Z = Z' + Z'' + \text{etc.}$ seront les forces employées à retenir le corps dans le sens des x, des y et des z. Ainsi, pour que l'équilibre ait lieu dans le système, lorsqu'il ne contient aucun point fixe, il faut qu'outre les trois équations (T), on ait les suivantes, qui expriment que les forces employées à fixer l'origine sont nulles

$$\left.\begin{aligned} X &= X' + X'' + X''' + \text{etc.} = 0 \\ Y &= Y' + Y'' + Y''' + \text{etc.} = 0 \\ Z &= Z' + Z'' + Z''' + \text{etc.} = 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (U).$$

41. Si les puissances P', P''.... étoient appliquées aux divers points d'une figure plane, et disposées dans le plan de cette figure, que nous regarderons comme celui des xy, on auroit alors $Z' = 0$, $Z'' = 0 \ldots z' = 0$, $z'' = 0 \ldots$: il s'ensuit que les équations (T) se réduisent dans ce cas à la première

$$X'y' - Y'x' + X''x'' - Y''x'' + \text{etc.} = 0.$$

Cette équation exprime l'état d'équilibre des puissances

autour de l'origine fixe : or, on observe que $X'y'$ et $Y'x'$ sont les momens, par rapport à l'origine, des forces X' et Y'; ainsi $X'y' - Y'x'$ est le moment de leur résultante P', aussi par rapport à l'origine (27) : il en est de même des autres forces. Abaissons de l'origine des perpendiculaires sur les forces P', P''.... et désignons leurs longueurs respectives par p', p''... on aura $P'p' = X'y' - Y'x'$... donc l'équation précédente devient

$$P'p' + P''p'' + P'''p''' + \text{etc.} = 0.$$

Mais si l'origine n'est point fixe, il faut en outre avoir recours aux équations (U), qui se réduisent aux deux premières; et comme $X' = P' \cos \alpha'$, $Y' = P' \sin \alpha'$; etc, on a, pour exprimer l'équilibre du système, les trois équations

$$\left.\begin{aligned} P'p' + P''p'' + \text{etc.} &= 0, \\ P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + \text{etc.} &= 0, \\ P' \sin \alpha' + P'' \sin \alpha'' + \text{etc.} &= 0, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (V).$$

On auroit pu arriver à ces équations dans les deux cas, en appliquant ici tous les raisonnemens que nous avons développés sur le cas général; mais nous ne nous y arrêterons pas. Nous ferons seulement observer qu'ici le théorême des momens, qui est renfermé dans la première de ces équations, n'est plus une conséquence des deux autres, comme précédemment (27); mais qu'elle renferme des conditions nécessaires à l'état du système pour que l'équilibre ait lieu.

42. Si le système a deux de ses points fixes, c'est-à-dire s'il est assujetti à tourner autour de l'axe qui passe par ces deux points, cherchons la condition nécessaire pour que l'équilibre ait lieu.

Décomposons, comme précédemment, chaque force en trois autres qui soient parallèles aux trois axes, et réduisons chacun des groupes parallèles à un des axes à

une seule force. Le système sera par là réduit à trois puissances X, Y et Z. Supposons que l'axe fixe soit celui des z; la force Z étant parallèle à cet axe ne peut produire de mouvement, et il suffit d'exprimer analytiquement que les forces X et Y équivalent à d'autres qui passent par cet axe. Fig. 23. Pour cela, faisons passer par la force Y un plan BAC parallèle au plan xy, il rencontrera l'axe Az en A, et les plans des xz et des yz seront zAC et zAB. La puissance Y sera en DY, et la force X en HX; et on aura (36)

$$X \times EF = X'y' + X''y'' + \text{etc.}, \quad Y \times AF = Y'x' + Y''x'' + \text{etc.}$$

Cela posé, menons par l'axe fixe un plan quelconque, tel que $zADK$; il rencontrera la force Y en D, et la force X en H: menons par ces points D et H une droite DHI, et décomposons la force X en deux autres parallèles; l'une ξ passant en D, et dans le plan BAC; l'autre rencontrant l'axe fixe en I; celle-ci sera détruite par cet axe. Comme on a $\frac{IH}{ID} = \frac{AG}{AD} = \frac{EF}{FD}$, on en conclura que

$$\xi \times FD = X \times EF.$$

Exprimons maintenant que les forces Y et ξ ont leur résultante dirigée suivant AD; pour cela, observons que si on fait $x = 0$, et $y = 0$ dans l'équation (E) n°. 23, qui est celle de la résultante, on a la condition qui exprime que cette force passe par l'origine: cette condition est ici

$$\xi \times FD = Y \times AF.$$

Donc pour que les forces Y et X équivalent à d'autres qui soient dirigées vers l'axe fixe, il faut qu'on ait $X \times EF = Y \times AF$ ou

$$X'y' - Y'x' + X''y'' - Y''x'' + \text{etc.} = 0 \ldots\ldots (X).$$

Cette équation est celle qui exprime que le système est en

équilibre autour de l'axe fixe. Ainsi il ne faut qu'une équation de condition qui exprime que *la somme des momens, par rapport à l'axe fixe, des composantes prises dans des plans perpendiculaires à cet axe, est nulle.*

43. En rapprochant ce théorême de ce qu'on a vu ci-dessus, on remarque que pour qu'un système soit en équilibre autour d'un point fixe, il doit remplir les trois conditions auxquelles il seroit assujetti, s'il y avoit trois axes fixes rectangulaires passant par ce point; et si le système est libre, il faut en outre qu'il satisfasse aux équations (U), qui, n'étant autre chose que les valeurs (J), indiquent que si on transporte les forces parallèlement à elles-mêmes pour les appliquer toutes en un même point, l'équilibre devra encore avoir lieu dans cet état.

44. Supposons qu'il n'y ait pas équilibre dans le système; réduisons-le, comme ci-dessus, à trois forces X, Y et Z parallèles aux axes; faisons passer par la force X un plan quelconque, il rencontrera les forces Y et Z chacune en un point: or, si on décompose dans ce plan la force X en deux autres qui soient appliquées en ces points, le système sera réduit à quatre forces qui se rencontreront deux à deux, et qui seront situées dans des plans respectivement parallèles aux plans des xy et des xz. Ces quatre forces équivaudront à deux qui, en général, ne se rencontreront pas: donc *le système a deux résultantes.* Il seroit facile d'appliquer ici le calcul, et de déterminer ces forces.

Mais il peut arriver que ces deux forces se rencontrent; alors le système n'a qu'une seule résultante R. Comme en y introduisant la force $-R$, l'équilibre a lieu, les équations (T) et (U) doivent être satisfaites. Mais alors celles-ci devenant (G), page 19, les équations (H) déterminent la grandeur et la direction de la résultante R. Soient x,

y et z les coordonnées de l'un de ses points : faisons, pour abréger,

$$L=(X'y'-Y'x')+\text{etc.}\quad M=(Z'x'-X'z')+\text{etc.}\quad N=(Y'z'-Z'y')+\text{etc.}$$

En ayant égard à la force $-R$, les équations (T) deviennent

$$Xy-Yx=L,\quad Zx-Xz=M,\quad Yz-Zy=N;$$

ce qui détermine x, y et z. Si on élimine deux de ces quantités, la troisième disparoit d'elle-même : ainsi en multipliant ces équations respectives par Z, Y et X, et ajoutant on a

$$LZ+MY+NX=0.$$

Equation sans laquelle les trois équations précédentes ne peuvent avoir lieu à-la-fois, et qui exprime une condition entre les données du problême pour que les forces soient réductibles à une seule.

45. Lorsque les forces sont dans un même plan, il n'y a qu'une seule résultante. En effet, réduisons nos forces à deux autres X et Y parallèles à deux axes : ces forces seront déterminées par les équations (35) ; et on aura

$$X=X'+X''+\text{etc.}\quad Xy=X'y'+X''y''+\text{etc.}$$
$$Y=Y'+Y''+\text{etc.}\quad Xx=X'x'+X''x''+\text{etc.}$$

Il est clair maintenant que ces deux forces X et Y équivaudront à une seule R qui sera la diagonale du rectangle construit sur X et Y : ainsi on aura, comme au n°. 25, les équations (B, C et D) qui déterminent la grandeur de la résultante et l'angle α qu'elle fait avec l'axe des x. Pour avoir sa distance r à l'origine, on observe que son moment par rapport à l'origine, est la différence des momens des composantes X et Y, (27); ainsi $Rr=Xy-Yx$, ou plutôt

$$Rr=X'y'-Y'x'+X''y''-Y''x''+\text{etc.},$$

ou bien en raisonnant comme au numéro (41)

$$Rr = P'p' + P''p'' + \text{etc.} \ldots\ldots \quad (Y).$$

Désignons par Π la somme des momens des forces par rapport à l'origine, nous aurons $Rr = \Pi$, équation qui détermine r.

Fig. 24. Soient donc Ax et Ay les axes des x et des y, on mènera par l'origine la droite $Ap = r$, faisant avec Ay un angle $= \alpha$; la droite RB perpendiculaire à Ap sera la direction de la résultante. On remarque qu'il y a quatre droites qui satisfont à cette construction; mais les signes de sin α, cos α, et tang α serviront à lever toute incertitude à cet égard. On a d'ailleurs pour l'équation de la ligne BR, $y = \text{tang}\,\alpha . x + AB$; or dans le triangle ApB, on a $AB = \frac{r}{\cos\alpha} = \frac{\Pi}{R\cos\alpha}$, ou $AB = \frac{\Pi}{X}$; et comme $\text{tang}\,\alpha = \frac{Y}{X}$, on en conclut que l'équation de la ligne BR est $xy - Yx = \Pi$.

46. Supposons que l'équilibre n'ait point lieu entre des forces situées dans le plan xy, l'origine étant fixe; alors l'équation du n°. 41 n'est point satisfaite; disposons une force Q, telle qu'elle satisfasse à cette équation; q désignant la distance de cette force à l'origine, on a

$$Qq + P'p' + P''p'' + \text{etc.} = 0.$$

Les forces Q, P', P'', ... seront en équilibre autour de l'origine fixe. Or cette équation ne fait connoître que l'une des deux quantités Q et q; l'autre est entièrement arbitraire, ainsi que la direction de la force Q: donc le problème est indéterminé. Dans ce cas on peut disposer des grandeurs arbitraires, de manière à obtenir une pression de grandeur et de directions données. Dans tout autre problème semblable à celui-ci il seroit facile de faire un raisonnement analogue.

VI. *Des pressions sur les points et axes fixes.*

47. Pour que la résultante d'un système soit détruite il faut qu'elle passe par un axe ou un point fixe : mais il est très-important de connoître quelle pression cet axe ou ce point éprouve ; car s'il n'est point capable d'une résistance indéfinie, l'obstacle n'est pas suffisant pour détruire l'action des forces. Or cette *PRESSION est visiblement égale et opposée à la force qui devroit être employée pour produire l'équilibre dans le système, sans le secours de l'axe ou du point fixe*, puisque la réaction est toujours égale à l'action ; si donc on cherche la résultante du système, le point où elle est appliquée doit éprouver un effort de même grandeur et de même direction qu'elle. Ainsi, d'après ce qui a été dit précédemment, la recherche de la pression exercée sur un point fixe n'a aucune difficulté puisqu'elle est réduite à celle de la résultante.

Quand il s'agit d'un axe fixe, il arrive souvent qu'il est retenu en deux points, qu'on appelle *tourillons*, dans des *colliers* ou *crapaudines* : alors il est beaucoup moins intéressant de connoître la pression qu'éprouve le point où la résultante rencontre l'axe, que l'effort qui en résulte sur les points d'appui. Soient donc EF l'axe fixe ; Fig. 26. A, B les deux colliers ; RM la résultante. Pour trouver la pression exercée en A et en B, il ne s'agit que de décomposer la force R en deux autres appliquées en ces points. Ce problème a été résolu n°. 33, et les équations (M) en donnent la solution.

48. Dans ce que nous avons dit n°. 42, lorsqu'il s'agissoit de l'équilibre autour d'un axe fixe, nous avons omis la force qui étoit parallèle à cet axe ; mais lorsqu'il s'agit

de déterminer les pressions qu'il éprouve, on ne peut se dispenser d'y avoir égard : cherchons donc l'effet que produit sur un axe AB, fixe en A et en B, la force R qui lui est parallèle, et qui en est distante de $AC = BD = r$. Soit $AB = a$, et supposons que la force R agit de C vers D. Appliquons en A deux forces M et Q dans les directions AM et AQ; et au point B, la force S, dirigée suivant BS : déterminons les trois forces M, Q et S de manière à produire l'équilibre dans le système $CABD$, et nous connoîtrons les efforts exercés en A et en B. Or si on prend A pour origine, AB pour axe des x, AC pour axe des y, les équations d'équilibre (V) deviennent ici

Fig. 25.

$$R - M = 0, \quad S - Q = 0, \quad Rr - Sa = 0.$$

La première de ces valeurs fait voir que le corps est sollicité dans le sens de AB comme si la puissance R agissoit suivant cette droite même : les deux autres donnent $S = Q = \frac{Rr}{a}$; ainsi la force R tend à faire tourner l'axe autour des points A et B, en sens opposés, et avec une action égale.

VII. *De la décomposition des forces.*

49. D'après ce qui a été exposé, on voit qu'il sera toujours possible de déterminer la grandeur, la direction et la position de la résultante d'un système donné de forces : et on peut remarquer que nous avons fait dépendre toute notre théorie de ce principe, *deux forces égales et directement opposées se détruisent.* Le problème inverse est ce qui doit maintenant nous occuper. Ce problème consiste à décomposer au contraire une force donnée en plusieurs autres. Pour le résoudre, il faut supposer que la résultante R

est donnée, et qu'il s'agit d'en trouver les composantes : c'est-à-dire qu'il faut regarder comme connu, dans les équations précédemment obtenues, tout ce qui est propre à la résultante et chercher tout ce qui dépend des composantes : or il est clair que ce problême renferme plus ou moins d'indétermination.

Par exemple si on veut décomposer une force R, en d'autres forces P', P'', ... agissant sur le même point, et disposées dans le même plan, il est clair qu'il faut trouver les grandeurs et les directions de ces dernières à l'aide des équations (B, 23), c'est-à-dire déterminer P', P'', ... α' α'', par les équations

$$P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + \text{etc.} = R \cos \alpha.$$
$$P' \sin \alpha' + P'' \sin \alpha'' + \text{etc.} = R \sin \alpha.$$

Or comme elles ne peuvent faire connoître que deux de ces quantités, on voit qu'on pourra disposer de toutes, excepté de deux d'entr'elles.

Pareillement si on vouloit que les composantes fussent appliquées au même point, mais disposées dans l'espace, on emploieroit les équations (G) qui ne déterminent que les sommes X, Y et Z des composantes dans le sens de chaque axe. L'indétermination est ici plus grande quoique le nombre des équations soit plus considérable, parce que celui des inconnues est augmenté.

En général, pour décomposer une force donnée R en d'autres, il faut employer les équations (B), (G), (T), (U) ou (Y) suivant les diverses circonstances, et disposer arbitrairement de plusieurs des inconnues, de manière qu'il n'en reste qu'un nombre égal à celui des équations.

CHAPITRE II.

De la pesanteur et du centre de gravité.

I. *Propositions générales.*

5o. L'expérience nous apprend que les corps abandonnés à eux-mêmes éprouvent des efforts dirigés vers le centre de la terre : cette direction se nomme *verticale* ; c'est celle que prend dans le vide, un corps qui n'est retenu par aucun obstacle. On appelle *plan horisontal* celui qui est perpendiculaire à la verticale. Non-seulement tous les corps sont soumis à cette action, mais leurs parties les plus intimes y sont séparément sujettes : ainsi les portions quelconques d'un corps divisé tombent isolément, si aucun effort ne les arrête ; on voit même que chacune de ces parties arrive à la surface de la terre dans le même tems qu'emploieroit le corps entier. Si les choses nous paroissent se passer différemment, cela tient à la résistance de l'air : sous le récipient de la machine pneumatique, l'or et la plume la plus légère mettent le même tems à descendre.

Cette tendance universelle n'est pas essentielle aux corps ; c'est un effort réel dont la matière, par elle-même, est incapable ; ainsi il est dû à une puissance extérieure à laquelle on a donné le nom de gravité ou pesanteur. La pesanteur est donc une force dont l'action s'exerce continuellement et séparément sur toutes les molécules de la matière : on donne le nom de poids à la résultante de ces actions. On ne doit donc pas confondre la pesanteur avec le poids ;

puisque la pesanteur est la force qui imprime des impulsions égales aux diverses particules des corps, tandis que le poids est la résultante de toutes ces impulsions.

On appelle MASSE d'un corps la quantité absolue de matière dont il est composé : et il faut bien distinguer la masse d'un corps de son volume, c'est-à-dire, de l'espace géométrique renfermé par sa surface ; car l'expérience nous a appris que tous les corps sont criblés en tout sens d'une infinité de trous ou *pores* ; ils ont donc des quantités de matière bien différentes sous des volumes égaux ; c'est ce qui fait que tous les corps n'ont pas même poids, quoique tous soient sollicités par la même force. Comme la gravité n'exerce son action que sur la partie matérielle des corps, il s'en suit que le *poids est proportionnel à la masse* : d'où l'on voit que le poids dépend de la masse des corps, tandis que la pesanteur en est indépendante.

51. On a nommé DENSITÉ le rapport de la masse au volume, de sorte qu'on dit qu'une substance est plus *dense* qu'une autre, lorsqu'elle a plus de masse sous un volume égal. Si on avoit une substance qui n'eût point de pores, sa densité seroit la plus grande possible, et en lui comparant la densité des autres corps, on auroit la quantité de matière qu'ils renferment ; mais ne connoissant point de substances semblables, nous ne pouvons avoir que les densités relatives des corps, c'est-à-dire, le rapport de leur densité à celle d'une substance donnée : de sorte que dans l'équation $D = \frac{M}{V}$, où D est la densité, M la masse, et V le volume d'un corps, les quantités D, M et V expriment des rapports à des unités de leur espèce.

Si d, m, et v désignent la densité, la masse et le vo-

lume d'un autre corps, on aura aussi $d = \frac{m}{v}$; on déduit de là que

1°. Les masses de deux corps sont en raison directe de leurs volumes à densités égales ; car $d = D$ donne $\frac{M}{V} = \frac{m}{v}$.

2°. Les masses étant égales, les densités des substances sont en raison inverse des volumes ; car $m = M$ donne $DV = dv$.

3°. Les densités de deux corps sont en raison directe de leurs masses, à volumes égaux ; car $v = V$ donne $\frac{D}{d} = \frac{M}{m}$.

* On observera qu'*on peut substituer les poids aux masses*, à cause de la proportionnalité ; et comme dans les corps *homogènes*, c'est-à-dire, de même nature, la densité est constante, on peut substituer aussi les volumes aux masses.

* 52. Lorsque les corps obéissent à l'action de la gravité, les verticales décrites par leurs molécules se joignent au centre de la terre : ainsi ces verticales ne sont pas des lignes parallèles, Mais comme, de tous les corps qui sont à notre disposition, il n'en est aucun dont le volume soit assez considérable, pour que ses dimensions soient comparables au rayon de la terre, on peut regarder les verticales comme des droites parallèles dans un espace de peu d'étendue, sans avoir à craindre qu'il en puisse résulter d'erreur sensible. Ainsi les actions de la pesanteur peuvent être considérées comme celles de forces parallèles appliquées aux diverses molécules des corps. Tout ce qui a été dit (30 et suivans) a donc lieu ici ; reprenons les résultats déja obtenus, et appliquons-les à la gravité.

1°. Quand il s'agit de la pesanteur, le centre des forces * se nomme *centre de gravité ou d'inertie;* ce centre est donc (37) le point par lequel passe la résultante de tous les efforts verticaux, exercés sur chaque molécule par l'action de la pesanteur : cette résultante est parallèle aux forces, c'est-à-dire verticale, et sa grandeur est ce qui constitue le poids du corps.

2°. Quelle que soit la position qu'on donne au corps, * cette résultante passera toujours par le centre de gravité, puisque cela équivaut à changer la direction des puissances, sans changer leurs grandeurs, et sans qu'elles cessent d'être parallèles.

3°. Un corps pesant est en équilibre, si son centre de * gravité est soutenu.

4°. L'effort employé à soutenir ce centre est le poids * même du corps.

5°. Lorsqu'on veut trouver le centre de gravité d'un * système de corps, on peut supposer la masse de chacun d'eux concentrée en son centre de gravité propre, puisque le poids de chaque corps est une masse qui passe par ce centre : par là, on n'aura plus à considérer qu'un système de points pesans.

6°. Pour trouver le centre d'inertie mécaniquement, * il suffit de suspendre successivement le corps dans deux positions d'équilibre, à l'aide de fils verticaux appliqués tour-à-tour en deux points différens de ce corps; le point d'intersection de ces deux fils sera le centre cherché.

53. Nous dirons qu'un corps est *symétrique* par rapport * à un plan ou à un axe, lorsque ses molécules seront disposées deux à deux, à la même distance de ce plan ou de cet axe.

Concevons un corps homogène, symétrique par rapport

à un plan : il est clair que la somme des momens des molécules, par rapport à ce plan, doit être nulle. En effet, si l'on prend deux molécules qui soient disposées à la même distance de ce plan, leurs momens seront égaux et de signes contraires; et on peut en dire autant de toutes les molécules prises deux à deux. Ainsi la résultante du système sera dans ce plan (36), et par conséquent le centre de gravité y sera aussi : donc *tout corps homogène, symétrique par rapport à un plan, a son centre de gravité dans ce plan.*

La même chose a lieu pour une droite; c'est-à-dire que *tout corps homogène, symétrique par rapport à un axe, a son centre de gravité sur cet axe.* Car ce corps sera symétrique par rapport à deux plans quelconques qu'on feroit passer par cet axe : le centre de gravité devant se trouver dans chacun de ces deux plans, sera par conséquent sur leur intersection.

La même raison fait voir qu'il est le *centre de figure*, c'est-à-dire le point par rapport auquel tout le corps est symétrique : ainsi donc le centre de gravité d'une droite est en son milieu, celui d'un cercle, d'une circonférence, d'une sphère, d'un polygone régulier, etc. est au centre; celui d'un cylindre est au milieu de son axe, etc.

54. Nous avons vu que les valeurs (P) faisoient connoître la position du centre des forces parallèles, et donnoient les trois coordonnées de ce point. Faisons-leur prendre la forme convenable pour qu'elles donnent celles du centre de gravité. Ici les forces P' P'',.... etc. sont les actions que la pesanteur exerce sur chaque molécule, actions proportionnelles aux masses sur lesquelles elles agissent, d'après ce qu'on a vu (50). Soient m', m'',... les masses des molécules sollicitées par la pesanteur; x', y' et z'

les trois coordonnées de m'; x'', y'', z'' celles de m'', etc. on a $P' = gm'$, $P'' = gm''$, etc. Les valeurs (P) donnent donc pour les coordonnées X, Y et Z du centre de gravité,

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{m'x' + m''x'' + \text{etc.}}{m' + m'' + \text{etc.}} \\ Y &= \frac{m'y' + m''y'' + \text{etc.}}{m' + m'' + \text{etc.}} \\ Z &= \frac{m'z' + m''z'' + \text{etc.}}{m' + m'' + \text{etc.}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (A').$$

Ces résultats sont indépendans de la force avec laquelle la gravité exerce son action. C'est cette raison qui a engagé Euler à préférer le nom de *centre d'inertie* à celui de centre de gravité.

On peut écrire ces formules d'une manière concentrée qui est fort commode. On observe que le numérateur de la valeur de X, est une somme de termes de même forme que mx, en affectant le premier terme d'un accent; le second, de deux, etc..... On remplace $m'x' + m''x'' + \text{etc.}$ par $\Sigma.(mx)$; pareillement $m'y' + m''y'' + \text{etc.}$ par $\Sigma.(my)$, $m'z' + m''z'' + \text{etc.}$ par $\Sigma.(mz)$, et enfin $m' + m'' + \text{etc.}$ ou la masse entière du système par $\Sigma.(m)$. Par là, on a pour les coordonnées du centre de gravité les formules

$$X = \frac{\Sigma.(mx)}{\Sigma.(m)}, \quad Y = \frac{\Sigma.(my)}{\Sigma.(m)}, \quad Z = \frac{\Sigma.(mz)}{\Sigma.(m)} \ldots (B'),$$

équations dans lesquelles le caractère Σ indique une somme de termes de même forme, ou une intégrale finie, lorsque le nombre des points est lui-même fini; et une véritable intégrale de quantités infinitésimales, lorsque le nombre des points est infini. C'est ce qui sera bientôt éclairci.

55. Il arrive quelquefois qu'on prend dans un système le

centre d'inertie pour origine des coordonnées; alors on a $X=0$, $Y=0$, $Z=0$; on conclut de là que

$$\left.\begin{array}{l} m'x'+m''x''+\text{etc.}=0 \text{ ou } \Sigma.(mx)=0 \\ m'y'+m''y''+\text{etc.}=0 \text{ ou } \Sigma.(my)=0 \\ m'z'+m''z''+\text{etc.}=0 \text{ ou } \Sigma.(mz)=0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (C'').$$

Si le centre d'inertie étoit dans le plan yz, la première de ces équations auroit seule lieu; s'il étoit dans l'axe des z, on auroit à-la-fois les deux premières, etc.

56. Les équations (B', C') servent à faire connoître les trois coordonnées du centre d'inertie d'un système de points, ou d'un corps continu, et par conséquent la distance de ce centre aux plans respectifs des yz, des xz et des xy. On peut remarquer que ces équations ne sont qu'un énoncé du théorême des momens (36); car la première, par exemple, équivaut à $(m'+m''+\text{etc.})\,X=m'x'+m''x''+\text{etc.}$ Or, $(m'+m''+\text{etc.})\times X$ est le moment par rapport au plan yz, du corps entier considéré comme concentré en son centre d'inertie; $m'x'$, $m''x''$, etc. sont les momens des molécules par rapport au même plan. Donc *pour avoir la distance du centre de gravité d'un corps à un plan il faut multiplier un de ses élémens par sa distance à ce plan, et intégrer dans toute l'étendue du corps; on aura la somme des momens de ces élémens : il faudra ensuite diviser par la masse entière du corps.*

On observera que si le système est homogène, on pourra remplacer les masses par leurs volumes, puisqu'elles leur sont proportionnelles; et que s'il est composé de molécules réunies dans un même plan, il suffira de prendre les momens par rapport à des axes tracés dans ce plan.

II. *Des centres de gravité des corps terminés par des droites ou des plans.*

57. *Trouver le centre de gravité du contour d'un polygone rectiligne quelconque.*

Supposons le poids de chacun des côtés du polygone *ABCDE* concentré en son centre de gravité qui est en son milieu G', G'',.... et cherchons la résultante, soit par le principe de la composition des forces (30), soit par celui des momens (36). Fig. 27.

1°. Si on se sert de la théorie de la composition des forces, on trouvera le centre I de gravité des deux droites AB et BC à l'aide des équations (L), dans lesquelles on fera P et Q égaux à AB et BC. On aura de la même manière le centre de gravité H du système des trois côtés AB, BC, CD, en supposant qu'il y a en I une force $AB+BC$, et en G'' une autre force parallèle à la première et égale à CD, ainsi de suite.

2°. Si on veut employer le principe des momens, on mènera dans le plan du polygone deux axes quelconques Fx, Fy perpendiculaires entr'eux : on désignera par x', y'; x'', y'', etc. les distances des centres de gravité de chacun des côtés à ces deux axes, et par c', c'',.... les longueurs respectives de ces côtés; c'est-à-dire qu'on fera

$$x' = P'F = N'G',\ y' = P'G',\ c' = AB;\ \text{etc.}$$

La position de la résultante, par rapport à chacun des deux axes, sera déterminée par les équations (R, 36)

$$FQ = \frac{c'x' + c''x'' + \text{etc.}}{c' + c'' + \text{etc.}},\ QO = \frac{c'y' + c''y'' + \text{etc.}}{c' + c'' + \text{etc.}} = FL.$$

Ces valeurs détermineront sur les axes Fx, Fy, les points

Q et L; on mènera donc par ces points des droites indéfinies QO, LO, parallèles à Fy, Fx, leur point O d'intersection sera le centre de gravité demandé.

* 58. *Trouver le centre de gravité de l'aire d'un triangle rectiligne.*

Fig. 28.

* Soit le triangle ABC; il est clair que si on divise le côté AB, au point D, en deux parties égales, la droite CD coupera la surface du triangle en deux parties symétriques (53); puisqu'elle coupera en deux parties égales toute droite parallèle à AB. On en peut dire autant de la droite AE, menée au point E, milieu de CB : donc le centre d'inertie sera à-la-fois sur les droites AE et CD; ce centre sera donc à leur intersection G.

* Si on veut savoir en quel point de AE le centre G doit être placé, il est aisé de se convaincre qu'il est *aux deux tiers de cette ligne à partir du sommet.* En effet, la droite DE passant par E et D, coupera les côtés AB, BC en deux parties égales; elle sera donc parallèle à AC, et sa longueur sera la moitié de AC. Mais les triangles semblables AGC, GDE donnent $\frac{AG}{GE} = \frac{AC}{DE}$, donc $GE = \frac{1}{2} AG$, c'est-à-dire que si on divise AE en trois parties égales, GE sera l'une d'elles, et GA contiendra les deux autres.

Fig. 29. 59. *Trouver le centre de gravité de l'aire d'un polygone rectiligne quelconque.*

* On mènera de l'un des angles A du polygone, des diagonales AC, AD, qui le décomposeront en plusieurs triangles, dont on cherchera séparément les centres de gravité G', G'', G''', par le procédé précédent. On supposera le poids de chaque triangle concentré en ce point (52, 5°.), et on cherchera la résultante, soit à l'aide du principe de la

composition des forces (30), soit à l'aide de celui des momens (33).

1°. Dans le premier cas, on unira G' et G'' par une droite; on supposera deux forces parallèles, respectivement égales aux surfaces ABC, ACD, c'est-à-dire, aux aires de ces triangles, appliquées en G' et G'', on aura le point O d'application de la résultante à l'aide de l'équation (L). On aura de même le point H d'application de la résultante totale.

2°. Dans le second cas, on imitera ce qui a été fait dans le paragraphe 57; on mènera dans le plan du polygone deux axes arbitraires perpendiculaires entr'eux; on supposera que c', c'', etc. sont les masses, c'est-à-dire, les aires des triangles; et que x', y'; x'', y'', etc. sont les distances entre les axes et les centres de gravité G', G'', G''' de chacun de ces triangles. On aura pour les distances de ces mêmes axes au centre de gravité du polygone les valeurs $(R, 36)$. On prendra sur chaque axe un point distant de leur intersection, d'une quantité égale respectivement à chacune de ces deux valeurs; on mènera par ces points des parallèles à ces mêmes axes : leur intersection sera le centre de gravité cherché.

60. On voit, d'après ce court exposé, qu'on pourra trouver le centre de gravité d'un système quelconque de droites, ou d'aires planes terminées par des droites. Il ne faudra que chercher le centre de gravité de chacune des parties : le problème sera réduit à trouver celui d'un système de points; ce qu'on peut faire, soit à l'aide de la théorie de la composition des forces, soit à l'aide du principe des momens.

61. *Trouver le centre de gravité du volume d'un prisme quelconque à bases opposées parallèles.*

On cherchera les centres de gravité des surfaces de ses bases, et on mènera une droite par ces deux points ; elle sera placée symétriquement par rapport au solide, et devra (53) contenir le centre de gravité cherché, qui sera en son milieu.

* 62. *Trouver le centre de gravité d'une pyramide.*

On cherchera le centre de gravité de la base, et on mènera une droite du sommet à ce point ; elle sera disposée symétriquement, et devra contenir le centre cherché ; il y sera d'ailleurs placé *aux trois quarts de sa longueur à partir du sommet.* Pour démontrer cette proposition, nous distinguerons deux cas.

Fig. 30. 1°. *Si la pyramide est triangulaire*, on aura les centres de gravité F et G des faces BCD et ABC, en menant du milieu E de l'arête BC des droites aux angles A et D ; et prenant $EF = \frac{1}{3}.ED$, puis $EG = \frac{1}{3}.AE$, les droites AF et GD devront se couper en un point H puisqu'elles sont dans le plan AED : de plus chacune d'elles devra contenir le centre de gravité cherché (53) qui sera par conséquent en H. Menons GF ; cette droite sera parallèle à AD, et sa longueur sera le tiers de AD ; car elle coupe ED et EA au tiers de leurs longueurs respectives. Et comme les triangles GHF et AHD sont semblables, on a $\frac{AH}{HF} = \frac{AD}{GF}$, donc $HF = \frac{1}{3}AH$; et si on divise AF en quatre parties égales, HF sera l'une d'elles, et AH contiendra les trois autres.

* 2°. *Si la pyramide a une base quelconque*, après avoir
Fig. 31. trouvé le centre d'inertie R de cette base, on mènera la droite AR par le sommet : elle contiendra le centre cherché. On divisera la base en triangles par des diagonales menées de l'un de ses angles ; on fera passer par le sommet et ces diagonales des plans, qui décomposeront le vo-

lume en pyramides triangulaires, dont on cherchera les centres d'inertie respectifs en L, M et N. Ils seront, d'après ce qui vient d'être dit, sur les droites menées aux centres de gravité de leurs bases, et aux trois quarts de leurs longueurs à partir du sommet A.

Par la théorie des lignes proportionnelles, il est clair que * les points L, M, N seront dans un plan parallèle à la base ; ce plan contiendra d'ailleurs le centre d'inertie cherché, puisqu'on peut concentrer chaque pyramide en son centre de gravité, c'est-à-dire, en L, M et N (52), et que le centre des forces est toujours situé dans le même plan que les points d'application (37). Le centre d'inertie cherché sera donc en I, au point d'intersection de la ligne AR par ce plan ; or on sait que ce plan doit couper toutes les droites partant du point A, en parties proportionnelles : donc I sera aux trois quarts à partir du sommet.

63. D'après cela, on peut trouver, soit à l'aide de la * composition des forces, soit par le principe des momens, le centre de gravité d'un corps terminé par des faces planes, puisqu'on peut toujours le concevoir décomposé en pyramides ou en prismes, dont on saura trouver en particulier le centre d'inertie ; ainsi on n'aura plus à considérer qu'un système de points (52, 57).

Ces diverses propositions sont, dans la pratique, appli- * cables aux surfaces courbes, parce qu'on peut les regarder, sans erreur sensible, comme composées de plans juxtaposés, c'est-à-dire comme des polyèdres.

III. *Des centres d'inertie, des courbes, des aires et des volumes.*

64. *Trouver le centre d'inertie d'une courbe quelconque.* Fig. 32.

Soit $y = fx$ l'équation donnée d'une courbe plane DZ rapportée aux deux axes rectangulaires AX et AY; x et y sont les coordonnées AP et PM d'un point quelconque M: il faut imaginer que cette courbe est composée d'une suite de points matériels pesans, et qu'on cherche leur centre de gravité, en supposant que les deux extrémités C et Z en sont déterminées. Reprenons les formules (B'), (où la caractéristique Σ devient une intégrale) ou, si on veut, la conséquence (56) à laquelle elles ont conduit. La masse pesante est ici l'arc de courbe lui-même, nous en représenterons la longueur CM par s; ainsi $ds = Mm$ en sera l'élément. La troisième des valeurs (B'), qui donne la distance du centre de gravité au plan des xy est inutile dans le cas présent, puisque le plan YAX doit contenir ce centre (37), ce qui donne $Z = 0$. Ainsi on a (56)

$$(1) \ldots X = \frac{\int(x\,ds)}{s}, \quad (2) \ldots Y = \frac{\int(y\,ds)}{s} \ldots (D').$$

Voici l'usage qu'on fera de ces équations.

On tirera de l'équation de la courbe les valeurs de ds et de s, en fonction de x ou de y; (car on sait qu'on a $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, d'où on tire $s = \int\sqrt{\{dx^2 + dy^2\}}$; et substituant ici ces valeurs, il ne restera plus qu'à exécuter les intégrales $\int(x\,ds)$, $\int(y\,ds)$ et $\int\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, pour avoir les deux coordonnées du centre d'inertie exprimées généralement. On observera seulement que les intégrales qu'on est obligé de trouver, nécessitent l'introduction de constantes, dont la détermination dépendra de la position du point qui marque l'extrémité de l'arc de courbe. Si, par exemple, cet arc commence au point C, dont les coordonnées $AB = a$, $BC = b$, sont connues, on satisfera aux deux conditions suivantes :

1°. D'avoir en même tems $s = 0$, $x = a$, $y = b$, ce

qui déterminera la constante introduite dans la recherche de s.

2°. Que $x = a$ et $y = b$ donnent $f(x\,ds) = 0$, $f(y\,ds) = 0$, puisque $f(x\,ds)$, $f(y\,ds)$ désignent des sommes de momens, qui doivent être nulles au point C : ce qui déterminera les constantes introduites dans $f(x\,ds)$, et $f(y\,ds)$.

Les intégrales se trouveront d'ailleurs par la méthode des quadratures, et elles ne seront définies que quand on aura introduit la condition qui fixe l'autre extrémité Z de l'arc : on changera donc x en AF, et y en FZ ; et on aura les coordonnées du centre d'inertie exprimées en quantités connues. On voit, au reste, qu'en général cette manière d'opérer est la même que celle qu'on emploie pour intégrer entre des limites ; c'est ce que quelques exemples éclairciront bientôt. Quand on voudra trouver le centre de gravité d'une courbe plane, on n'oubliera pas de la disposer par rapport à ses axes coordonnés de la manière la plus convenable, afin de simplifier les calculs : par exemple, d'après ce qu'on a dit (53), on voit que l'équation (2) sera inutile, toutes les fois que l'axe des x sera symétrique par rapport à la courbe, puisqu'alors cet axe contenant le centre de gravité, on aura $Y = 0$.

Si la courbe dont on cherche le centre de gravité est à double courbure, elle doit être donnée par ses deux projections (24) sur les plans coordonnés, ou plus généralement par deux surfaces courbes dont elle est l'intersection ; ainsi on aura, dans ce cas, deux équations pour cette courbe ; et $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$, donnera ds et s en fonction de l'une des variables x, y et z. Les coordonnées du centre de gravité sont visiblement alors

$$X = \frac{f(x\,ds)}{s}, \quad Y = \frac{f(y\,ds)}{s}, \quad Z = \frac{f(z\,ds)}{s},$$

65. Cherchons le centre de gravité d'une ligne droite. Il est évident (53) que le centre de gravité d'une ligne droite est au milieu de sa longueur : ce n'est donc pas tant pour déterminer ce centre que nous allons résoudre le problème analytiquement, que pour appliquer à un exemple simple les valeurs (D'), et les observations précédentes.

Fig. 33. Soit $y = ax + b$ l'équation de la droite DE; supposons qu'il s'agisse de trouver le centre de gravité de la partie DE de cette droite : faisons $AB = \alpha$, $BD = \mathfrak{C}$; $AC = \alpha'$, $CE = \mathfrak{C}'$. On a $dy = adx$, d'où on tire

$$ds = dx \cdot \sqrt{(1 + a^2)},\ ds = \frac{dy}{a} \cdot \sqrt{(1 + a^2)}.$$

Donc $s = x \cdot \sqrt{(1 + a^2)} + A$, et $s = \frac{y}{a} \cdot \sqrt{(1 + a^2)} + B$ s or $s = 0$, donne $x = \alpha$, et $y = \mathfrak{C}$; donc $A = -\alpha \cdot \sqrt{(1 + a^2)}$, et $B = -\frac{\mathfrak{C}}{a} \cdot \sqrt{(1 + a^2)}$; ainsi

$$s = (x - \alpha) \cdot \sqrt{(1 + a^2)};\ s = \frac{y - \mathfrak{C}}{a} \cdot \sqrt{(1 + a^2)}$$

substituant dans les formules (D') on trouve

$$X = \frac{\int(x dx)}{x - \alpha} = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{x^2 + C}{x - \alpha};\ Y = \frac{\int(y dy)}{y - \mathfrak{C}} = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{y^2 + D}{y - \mathfrak{C}}.$$

On détermine les constantes C et D en égalant les numérateurs à zéro après y avoir fait $x = \alpha$, et $y = \mathfrak{C}$, ce qui donne $C = -\alpha^2$, $D = -\mathfrak{C}^2$; et par conséquent $X = \frac{1}{2}(x + \alpha)$, $Y = \frac{1}{2}(y + \mathfrak{C})$. Pour completter l'intégrale, il faut changer x en α', et y en $\mathfrak{C}'$: ainsi $X = \frac{1}{2}(\alpha' + \alpha)$, et $Y = \frac{1}{2}(\mathfrak{C}' + \mathfrak{C})$. Mais dans le trapèze $BDEC$, on voit que pour le milieu G de DE, on a $AF = \frac{1}{2}(\alpha' + \alpha)$, $FG = \frac{1}{2}(\mathfrak{C}' + \mathfrak{C})$: ce qui démontre que $AF = X$, $FG = Y$.

66. Soit demandé le centre de gravité d'un arc de cercle MM'. L'équation du cercle est $y^2 = 2ax - x^2$, quand l'origine est au sommet A, milieu de MM'; et que a est le rayon AC. A cause des arcs AM et AM' symétriques par rapport à AC, le centre de gravité est sur AC en un point I, et sa distance AI à l'axe AY est la même que celle de l'arc AM : faisons $AM = s$. Comme Fig. 24.

$$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{adx}{y} = \frac{adx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$$

la première équation (D') devient $X = \frac{a}{s}.\int \frac{xdx}{\sqrt{(2ax-x^2)}}$.

Pour intégrer faisons $x = a + z$; il vient. . . . . $\sqrt{(2ax - x^2)} = y = \sqrt{(a^2 - z^2)}$; il faut donc évaluer

$$\int \frac{(z+a)dz}{\sqrt{(a^2 - z^2)}} = \int \frac{zdz}{\sqrt{(a^2 - z^2)}} + \int \frac{adz}{\sqrt{(a^2 - z^2)}}.$$

La première partie est visiblement $= -\sqrt{(a^2 - z^2)} = -y$; la seconde équivaut à $\int \frac{adx}{\sqrt{(2ax - x^2)}} = s$; ainsi on a $X = \frac{a}{s}(s - y + C)$. Pour déterminer C il faut faire $s = 0, y = 0$ dans le numérateur $f(xds) = a(s - y + C)$, et égaler à zéro; on a $C = 0$, d'où $X = AI = \frac{a}{s}(s - y) = a - \frac{ay}{s}$, et par conséquent $IC = a - AI = \frac{ay}{s}$; d'où on tire $\frac{2s}{a} = \frac{2y}{IC}$, ou $\frac{\text{arc } MAM'}{\text{rayon } AC} = \frac{\text{corde } MM'}{IC}$. Ainsi *$IC$ est quatrième proportionnelle à l'arc, au rayon et à la corde.*

Le centre de gravité de la circonférence entière est visiblement au centre C (53). C'est aussi ce que donne la valeur

ci-dessus de X; car $x = 2a$, donne $y = 0$, et $s = \pi$; d'où on tire $X = a$.

P. 34 bis. 67. Soit enfin proposé de trouver le centre de gravité de l'arc cycloïdal MAM', dont le cercle générateur a pour diamètre $AB = a$. L'équation de la courbe (Traité élém. de calcul diff. de *Lacroix*, n°. 102) est $dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{(ay - y^2)}}$, l'origine étant en C, et l'axe des x étant CB. Transportons l'origine au sommet A, et prenons AB pour axe des x; comme CC' est le développement de la circonférence du cercle générateur, on a $CB = \frac{1}{2}\pi a$; il faut donc changer x en $\frac{1}{2}\pi a - y'$, et y en $a - x'$; par là on a

$$dy = \frac{(a - x')\,dx'}{\sqrt{(ax' - x'^2)}} = dx'.\sqrt{\left(\frac{a - x'}{x'}\right)}.$$

Désignons l'arc AM par s, nous aurons....., $ds = \sqrt{(dx'^2 + dy'^2)} = dx.\sqrt{\left(\frac{a}{x'}\right)}$, d'où on tire $s = \sqrt{a}.\int\frac{dx'}{\sqrt{x'}} = 2\sqrt{(ax')}$; (d'où on conclut que dans la cycloïde l'arc AM est double de la corde correspondante AL du cercle générateur, car $AL = \sqrt{(ax')}$) ainsi $s^2 = 4ax'$. En vertu de la symétrie (53) des arcs MA et $M'A$, le centre de gravité est sur AB, et son abscisse X est la même que celle du centre de gravité de $AM = s$; comme $\int(x\,ds) = \int\frac{s^2\,ds}{4a}$, la première équation (D') devient

$$X = \frac{\int(s^2\,ds)}{4as} = \frac{s^3 + A}{12as} = \frac{s^3}{12as} = \frac{4ax}{12a} = \frac{1}{3}x.$$

Ainsi le centre de gravité de l'arc MAM' est au tiers de

l'abscisse AP. Celui de la cycloïde entière est au tiers du diamètre AB.

68. Trouver *le centre de gravité de l'aire d'une courbe plane.* Soit A l'origine et DCM une courbe donnée par son équation $y = fx$; proposons-nous de trouver le centre de gravité de l'aire $BCZF$; soit $AP = x$, $PM = y$. L'élément infiniment petit $PMmp$ a pour aire $y\,dx$; sa masse peut être concentrée au milieu de PM qui en est le centre de gravité : les momens par rapport à AX et AY sont donc $\frac{1}{2}y^2dx$, et $xy\,dx$. On éliminera de chacune de ces expressions l'une des variables à l'aide de l'équation $y = fx$, et intégrant ensuite depuis $x = AB$ et $y = BC$, jusqu'à $x = AF$ et $y = FZ$, on aura $\frac{1}{2}\int y^2dx$, et $\int xy\,dx$ pour les sommes des momens de tous les élémens qui composent l'aire $BCZF$: et $\int y\,dx$ pour cette aire : ainsi on aura (56) pour les coordonnées du centre de gravité Fig. 31.

$$X = \frac{\int(xy\,dx)}{\int(y\,dx)}, \quad Y = \frac{\int(y^2dx)}{2\int(y\,dx)} \ldots\ldots (E').$$

S'il s'agissoit de l'aire $B'CZF'$ comprise entre deux courbes, ou deux branches de la même courbe, on auroit leurs équations $y = fx$ pour CZ, et $y' = Fx$ pour $B'F'$: on fera le même raisonnement. L'élément $P'Mmp'$ est $= (y - y')\,dx$; les coordonnées du milieu de $P'M$ sont x et $\frac{1}{2}(y + y')$; les momens, par rapport à AX et AY sont donc (en concevant l'élément concentré au milieu de $P'M$), $\frac{1}{2}(y^2 - y'^2)\,dx$ et $(y - y')\,x\,dx$; de sorte que les coordonnées du centre de gravité sont

$$X = \frac{\int(y - y')\,x\,dx}{\int(y - y')\,dx}, \quad Y = \frac{\int(y^2 - y'^2)\,dx}{2\int(y - y')\,dx} \ldots\ldots (F').$$

On peut aussi trouver les formules (E') et (F') par le procédé suivant, qui se prête aisément au cas où, au lieu des

droites BC, FZ, on auroit pour limites deux courbes : cette marche nous sera d'ailleurs utile par la suite. Concevons un élément $abcd$ rectangulaire, infiniment petit dans les deux sens, et dont les côtés soient respectivement parallèles aux axes AX et AY : et faisons $aP = z$. L'élément sera $dxdz$ et ses momens, par rapport à ces axes, seront $zdxdz$ et $xdxdz$. Si on intègre ces expressions par rapport à z seule, l'aire de l'élément $PMmp$ sera zdx, ou plutôt ydx, à cause que cette aire a été prise de $z = 0$, à $z = y$, dans le cas où l'aire est terminée par l'axe AX; $\frac{1}{2}z^2dx$ et $xzdx$, (ou par la même raison $\frac{1}{2}y^2dx$, et $xydx$), seront de même les momens par rapport aux x et aux y, de tous les élémens renfermés entre les deux ordonnées infiniment voisines PM et pm. Intégrant ensuite ydx, $\frac{1}{2}y^2dx$ et $xydx$, de $x = AB$, à $x = AF$, on aura l'aire $BCZF$, et les sommes des momens de tous les élémens de cette aire, par rapport aux x et aux y; ce qui redonne les formules (E').

Supposons qu'il s'agisse de trouver le centre de gravité de l'aire $B'CMP'$ renfermée entre deux ordonnées et deux courbes données ou deux branches de la même courbe, tout ce qui a été dit ci-dessus peut aisément recevoir ici son application; $dzdx$, $zdxdz$, et $xdxdz$ sont l'élément $abcd$, et ses momens; zdx, $\frac{1}{2}z^2dx$, et $xzdx$ sont encore l'aire $P'Mmp'$, et les sommes des momens de ses élémens par rapport aux axes, pourvu que ces intégrales soient prises de $z = PP'$, à $z = PM$. Ainsi, soit $PM = y$, et $PP' = y'$, on aura respectivement $(y - y_1)dx$, $\frac{1}{2}(y^2 - y'^2)dx$, et $(y - y')\,x\,dx$ pour l'aire $P'Mmp'$, et les momens de ses élémens. On intégrera de $x = AB$ à $x = AF$, et on aura l'aire $B'CZF'$, et les sommes de tous les momens des élémens qui la composent : ce qui conduit aux valeurs (F').

Il est intéressant de remarquer que les formules précé-

dentes peuvent aussi s'appliquer aux cas où les coordonnées de la courbe ne sont pas à angle droit. En effet, soit α l'angle qu'elles forment, l'élément $PMmp$ est $y\,dx.\sin\alpha$, et l'aire entière est $\int y\,dx.\sin\alpha$; de même $\frac{1}{2}\int y^2 dx.\sin\alpha$, et $\int xy\,dx.\sin\alpha$ sont les sommes des produits des élémens de cette aire par leurs coordonnées. Or observant que le théorème du n°. 34 a lieu même lorsqu'elles ne sont pas à angle droit, il est visible que les coordonnées X et Y du centre de gravité de l'aire sont les mêmes que nous avons trouvées précédemment, puisque la constante $\sin\alpha$ disparoît comme étant facteur commun des deux termes de chaque fraction.

69. Prenons pour premier exemple le trapèze DE. Il faut Fig. 35.
concevoir que la droite AG, axe des x, partage chacun des deux côtés parallèles DC, EF, en deux parties égales. Le centre de gravité I sera sur cet axe, et la première des formules (E') suffira pour trouver la distance de ce centre I au point A, car les abscisses des centres de gravité des aires $ACEG$, $CEFD$ sont les mêmes, à cause de la symétrie des deux parties $ACEG$, $AGFD$. Soient $CD=b$, $EF=b'$, $AP=x$, $PM=y$; quoique les coordonnées puissent être obliques, on a $y=ax+\frac{1}{2}b$, pour l'équation de la droite CE, et par conséquent

$$\int(xy\,dx)=\int(ax^2dx+\tfrac{1}{2}bx\,dx)=\tfrac{1}{3}.ax^3+\tfrac{1}{4}.bx^2+C.$$
$$\int(y\,dx)=\int(ax\,dx+\tfrac{1}{2}\,b\,dx)=\tfrac{1}{2}.ax^2+\tfrac{1}{2}.bx+C'.$$

Les constantes C et C' sont nulles parce que les intégrales le sont elles-mêmes lorsque $x=0$; ainsi on a pour l'abscisse du centre de gravité de $ACPM$, ou de $CMM'D$,

$$X=\frac{4ax+3b}{6ax+6b}\times x.$$

Pour avoir AI, supposons $AG=m$; comme en menant Ce parallèle à AG, on a $\frac{Cm}{Mm}=\frac{Ce}{Ee}$,

ou $\frac{x}{y-\frac{1}{2}.b}=\frac{m}{\frac{1}{2}.(b'-b)}$, ou enfin $y=\frac{b'-b}{2m}\times x+\frac{b}{2}$, on en conclut $a=\frac{b'-b}{2m}$; mettant donc ici $2am$ ou $b'-b$ pour $2ax$, on trouve enfin

$$AI=\tfrac{1}{3}m.\frac{b+2b'}{b+b'}.$$

Cette valeur donne aussi la position du centre de gravité du parallélogramme et du triangle : en effet, dans le premier cas on a $b'=b$, ainsi $AI=\frac{1}{2}m$; dans le second on a $b=0$, d'où $AI=\frac{2}{3}m$; ce résultat a été déja obtenu (58); on auroit pu le chercher immédiatement.

70. Cherchons le centre d'inertie d'un segment parabolique : l'équation de la parabole étant $y^2=px$, on a

$$\int xydx=\tfrac{2}{5}x^2\sqrt{(px)}+C;\ \int ydx=\tfrac{2}{3}x\sqrt{(px)}+C'.$$

Si l'aire dont on cherche le centre d'inertie commence à l'origine, C et C' sont nuls. En observant que la symétrie par rapport à l'axe des x rend la seconde formule (E') inutile, on a $X=\frac{3}{5}x$; donc *le centre de gravité d'un segment parabolique est sur l'axe des abscisses, aux trois cinquièmes de la longueur de cette abscisse.*

71. *Trouver le centre de gravité de l'aire d'une surface de révolution.*

Supposons que la courbe génératrice tourne autour de l'axe des x; le centre de gravité est sur cet axe, et, en désignant par $y=fx$ l'équation de cette courbe, l'aire engendrée a pour élément circulaire $2\pi yds$: si donc on conçoit un plan perpendiculaire à l'axe des x, et passant par l'origine, le moment de cet élément par rapport à ce plan est $2\pi xyds$; en mettant pour y et $ds=\sqrt{(dx^2+dy^2)}$,

leurs valeurs en fonction de x et dx, et intégrant entre les limites convenables, on aura $2\pi\int y ds$ pour l'aire entière, et $2\pi\int xy ds$ pour la somme des momens de tous les élémens qui la composent. Ainsi (56) on aura pour la distance du centre de gravité à l'origine

$$X = \frac{\int xy ds}{\int y ds} \ldots\ldots\ldots (G').$$

Prenons pour exemple les surfaces engendrées par une droite. L'équation de la ligne génératrice est $y = ax + b$; donc $ds = \sqrt{(a^2 + 1)}dx$. Ainsi

$$\int xy ds = \sqrt{(a^2 + 1)} \int xy dx, \text{ et } \int y ds = \sqrt{(a^2 + 1)} \int y dx.$$

Donc $$X = \frac{\int xy dx}{\int y dx}.$$

Or, cette expression est la même chose que (E'); ce qui fait voir que le centre de gravité de l'aire de toute surface de révolution, engendrée par une droite autour de l'axe des x, a la même coordonnée dans le sens de cet axe que le centre de gravité de l'aire génératrice. Il en résulte que *le centre de gravité de l'aire d'un trapèze, d'un parallélogramme ou d'un triangle, est respectivement à la même distance de l'origine que le centre de gravité de l'aire d'un cône tronqué, d'un cylindre ou d'un cône.*

72. Soit proposé de trouver le centre de gravité de la surface d'une zône sphérique, c'est-à-dire, d'une portion de l'aire d'une sphère comprise entre deux plans parallèles. Pour cela, comme l'équation du cercle est $y^2 = 2ax - x^2$, a étant le rayon, et l'origine étant au sommet, on a $ds = \frac{adx}{y}$, d'où $yds = adx$. En substituant dans la

formule (G') on a

$$X = \frac{\frac{1}{2}ax^2 + C}{ax + C'}.$$

On déterminera aisément C et C', quand on connoîtra la position et la longueur de l'arc générateur par rapport à l'axe des x. Mais s'il s'agit d'une calotte sphérique, on a $C = 0$, $C' = 0$; et par conséquent $X = \frac{1}{2}x$. Donc *le centre de gravité de la calotte sphérique est au milieu de la flèche.*

73. *Trouver le centre de gravité d'une surface courbe quelconque.*

Cette surface, rapportée à trois plans coordonnés, a une équation donnée : soit $dz = pdx + qdy$, l'équation différentielle de cette surface ; et faisons, pour abréger, $M = \sqrt{(1 + p^2 + q^2)}$. L'élément de l'aire est $Mdxdy$ conformément aux principes du calcul intégral (voyez Traité élém. de calcul diff. de *Lacroix*, 251) : donc $zMdxdy$, $yMdxdy$, et $xMdxdy$, sont les momens de cet élément par rapport aux trois plans respectifs des xy, des xz et des yz. Donc $\iint Mdxdy$ est l'aire entière, et $\iint zMdxdy$, $\iint yMdxdy$, $\iint xMdxdy$, sont les sommes des momens des élémens qui la composent : les doubles intégrales doivent être prises dans les limites convenables. Ainsi les trois coordonnées du centre de gravité sont (56)

$$X = \frac{\iint xMdxdy}{\iint Mdxdy}\,;\quad Y = \frac{\iint yMdxdy}{\iint Mdxdy}\,;\quad Z = \frac{\iint zMdxdy}{\iint Mdxdy}.$$

Fig. 36. 74. *Trouver le centre de gravité d'un volume quelconque symétrique par rapport à un axe* : tels sont les pyramides, les cônes, les solides de révolution, etc.

Si à partir du point C quelconque, on prend sur l'axe une longueur $CP = x$, et si on coupe le solide par un plan perpendiculaire à cet axe, la section K qu'on obtiendra

sera connue en fonction de x, puisque la génération du solide est donnée ; ainsi on aura $K = fx$. Soit $Pp = dx$, Kdx sera l'élément $M'Mmm'$ du volume ; et si on conçoit un plan perpendiculaire en C à l'axe CB, sur lequel est le centre de gravité, $Kxdx$ sera le moment de cet élément par rapport à ce plan. Ainsi $\int Kdx$ sera le volume, et $\int Kxdx$ sera la somme des momens de tous ses élémens. On aura donc (56)

$$X = \frac{\int Kxdx}{\int Kdx} \ldots\ldots\ldots (H').$$

Pour se servir de cette formule, il faut trouver K en fonction de x, d'après la nature du corps, faire les intégrations, et déterminer convenablement les constantes. Il est clair que, par la même raison que précédemment (68), il n'est pas nécessaire que AB soit perpendiculaire sur Hh.

75. S'il s'agit, par exemple, d'une pyramide ou d'un cône, l'arête AH est une droite : prenons l'origine au sommet A, faisons $AB = b$, et représentons par a l'aire de la base Hh. On sait que K et a, qui sont les aires de deux sections parallèles, sont proportionnelles aux quarrés de leurs distances au sommet A : ainsi on a $\frac{b^2}{x^2} = \frac{a}{K}$, d'où on tire $K = \frac{ax^2}{b^2}$; substituant dans la formule (H'), on a Fig. 30 bis.

$$X = \frac{\int Kxdx}{\int Kdx} = \frac{\int x^3 dx}{\int x^2 dx} = \frac{3x^4 + A}{4x^3 + B}.$$

Si le solide n'est pas tronqué, on a $A = 0$, et $B = 0$; d'où $X = \frac{3}{4}x$; puis faisant $x = b$, on a $X = \frac{3}{4}b$; ce qui est le résultat déja connu (62). Mais si le solide est tronqué, en prenant $AE = m$ pour l'abscisse de la base supérieure LO, on a $A = -5m^4$, et $B = -4m^3$; d'où on tire, en

mettant b pour x, $X = \frac{3}{4}\cdot\frac{b^4 - m^4}{b^3 - m^3}$. Les quantités qu'on regarde comme connues dans un cône tronqué sont les rayons des cercles de ses deux bases et sa hauteur. Soit $EO = r$, $BH = R$, et $EB = h$; il s'agit de trouver X en fonction de R, r et h. Or on a aisément $m = \frac{hr}{R - r}$ et $b = \frac{hR}{R - r}$: en substituant on obtient

$$X = \tfrac{3}{4}h.\frac{R^4 - r^4}{(R - r)\ (R^3 - r^3)}.$$

76. *Trouver le centre de gravité d'un volume de révolution.*

On sait que $\pi y^2 dx$ est l'élément du corps perpendiculaire à l'axe de révolution; $\pi x y^2 dx$ est son moment par rapport à un plan perpendiculaire à cet axe, et passant par l'origine. $\pi \int y^2 dx$ est le volume entier, $\pi \int x y^2 dx$ est la somme des momens de ses élémens. Donc on a (56)

$$X = \frac{\int x y^2 dx}{\int y^2 dx} \ldots\ldots\ (I').$$

Cette formule peut se déduire de (H') comme cas particulier : en effet K est ici un cercle dont y est le rayon, ainsi on a $K = \pi y^2$; en substituant, on retrouve la valeur précédente.

On pourroit appliquer immédiatement la formule (I') à la recherche du centre de gravité du cône, et du cône tronqué : il faudroit pour cela prendre pour génératrice une droite passant par l'origine, et dont l'équation seroit $y = ax$. On obtiendroit ainsi pour X les valeurs déja trouvées.

Fig. 34. 77. Soit pris pour exemple le segment sphérique MAM' : l'équation du cercle dont le rayon est a, l'origine étant

au sommet A, est $y^2 = 2ax - x^2$; la formule (I') devient donc

$$X = \frac{\int(2ax^2dx - x^3dx)}{\int(2axdx - x^2dx)} = \frac{\frac{2}{3}ax^3 - \frac{1}{4}x^4 + C}{ax^2 - \frac{1}{3}x^3 + D}.$$

En observant que le volume et les momens doivent devenir nuls quand $x = 0$, on trouve $C = 0$, et $D = 0$. Ainsi

$$X = \frac{8a - 3x}{12a - 4x} \times x.$$

S'il s'agit de la demi-sphère, il faut faire $x = a$, et on a $X = \frac{5}{8}a$; donc le *centre de gravité de la demi-sphère est aux trois huitièmes du rayon à partir du centre.*

Dans le segment parabolique le centre de gravité est aux deux tiers de l'axe à partir du sommet; car l'équation de la parabole, $y^2 = px$, donne pour (I')

$$X = \frac{\int px^2dx}{\int pxdx} = \frac{\frac{1}{3}px^3}{\frac{1}{2}px^2} = \frac{2}{3}.x.$$

L'équation de l'hyperbole est, en prenant l'origine au sommet, $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$: on aura pour le centre de gravité du solide engendré par cette courbe

$$X = \frac{\int(2ax^2 + x^3)dx}{\int(2ax + x^2)dx} = \frac{\frac{2}{3}ax^3 + \frac{1}{4}x^4}{ax^2 + \frac{1}{3}x^3} = \frac{8a + 3x}{12a + 4x} \times x.$$

Cette valeur approche d'autant plus de $\frac{2}{3}x$ que x est plus petit, et de $\frac{3}{4}x$ que x est plus grand, par rapport à a : X ne pouvant jamais avoir pour valeur l'une de ces deux quantités, elles sont les limites entre lesquelles le centre de gravité doit se trouver. Donc *le centre de gravité du segment hyperbolique est entre les deux tiers et les trois quarts de l'abscisse à compter du sommet.*

78. *Trouver le centre de gravité d'un volume quelconque.*

Supposons que ce volume s'étende depuis le plan des xy, jusqu'à une surface courbe donnée dont l'équation est $z = f(x, y)$, et soit terminé latéralement par des plans parallèles à ceux des xz et des yz ; $zdxdy$ sera l'élément du solide ; et on pourra en supposer la masse concentrée (53) au milieu de sa hauteur. Ainsi les momens de cet élément par rapport aux plans respectifs des xy, xz et des yz sont $\frac{1}{2}z^2dxdy$, $yzdxdy$, $xzdxdy$: on obtiendra donc les sommes des momens de tous les élémens qui composent le volume, et le volume lui-même, en substituant $f(x,y)$ pour z dans ces trois expressions, et dans $zdxdy$; puis intégrant par rapport aux deux variables, x, y, entre les limites convenables. Ainsi (67) les coordonnées du centre de gravité sont

$$X = \frac{\iint xzdxdy}{\iint zdxdy}, \quad Y = \frac{\iint yzdxdy}{\iint zdxdy}, \quad Z = \frac{\iint z^2dxdy}{2\iint zdxdy}.$$

Si le corps étoit compris entre deux surfaces courbes, ou deux nappes de la même surface, il seroit facile de se régler sur ce qui a été dit (68).

Fig. 34. 79. Appliquons à un exemple ce qui a été dit (52, 5°.) pour trouver le centre de gravité d'un système de corps. Cherchons celui du secteur sphérique engendré par le secteur circulaire MAC en tournant autour de AC. Ce volume est composé d'un segment sphérique et d'un cône : soient I et L leurs centres de gravité respectifs ; on a vu (77) qu'en désignant AP par x, et AC par a, on a

$$AI = \frac{8a - 3x}{12a - 4x} \times x, \text{ et } CL = \tfrac{3}{4}.CP = \tfrac{3}{4}(a - x).$$

Mais comme les positions de I et de L ne sont pas rappor-

tées au même point, on remplace la seconde de ces valeurs par

$$AL = AC - CL = a - \tfrac{3}{4}.(a - x) = \frac{3x + a}{4}.$$

Cela posé, concevons les volumes de ces deux corps réunis en leurs centres de gravité I et L : on connoît ces volumes par la géométrie, et on sait que

Le secteur $= \frac{2}{3}\pi a^2 x$.
Le segment $= \frac{1}{3}\pi x^2 (3a - x)$.
Le cône $= \frac{1}{3}.\pi(2ax - x^2)(a - x)$.

En prenant les momens par rapport au point A, on a pour celui du segment

$$\frac{\pi}{3} x^2 (3a - x) \frac{8a - 3x}{12a - 4x} \times x = \frac{\pi x^3}{3} \times \frac{8a - 3x}{4}.$$

Pour celui du cône

$$\frac{\pi}{3}.(2ax - x^2)(a - x) \times \frac{3x + a}{4}.$$

Enfin divisant la somme des momens par la somme des masses, qui est le volume du secteur, on a (56) pour la distance du point A au centre de gravité cherché, en ôtant le facteur commun $\frac{1}{3}.\pi x$,

$$X = \frac{\frac{1}{4}x^2 (8a - 3x) + \frac{1}{4}(2a - x)(a - x)(3x + a)}{2a^2};$$

et en réduisant $X = \frac{1}{8}(2a + 3x)$.

IV. *Méthode Centrobarique.*

80. La méthode *Centrobarique*, qu'on appelle aussi *règle de Guldin* du nom de son inventeur, consiste en un procédé fort simple, pour trouver l'aire ou le volume en-

gendré par la révolution d'une courbe quelconque, quand on connoît l'équation, et le centre de gravité de la ligne ou de l'aire génératrices : voici en quoi consiste cette méthode.

On peut écrire la seconde valeur (D'), et la seconde équation (E'),

$$Y = \frac{\int 2\pi y\,ds}{2\pi s}, \text{ et } Y = \frac{\int \pi y^2 dx}{2\pi \int y\,dx}.$$

La première de ces deux équations exprime la coordonnée, dans le sens de l'axe des y, du centre de gravité d'une ligne : elle donne $2\pi Y . s = \int 2\pi y\,ds$. Or $2\pi Y$ est la circonférence dont Y est le rayon ; c'est celle que décriroit le centre de gravité autour de l'axe des x, si on faisoit tourner la courbe sur cet axe : de plus $\int 2\pi y\,ds$ est l'expression de l'aire de la surface qu'engendreroit l'arc de courbe s par cette révolution : donc *la surface de révolution engendrée par une courbe donnée autour d'un axe, est égale au produit de la longueur de l'arc générateur par la circonférence décrite par son centre de gravité.*

La seconde des deux formules ci-dessus exprime la coordonnée dans le sens des y, du centre de gravité de l'aire d'une courbe ; elle donne $2\pi Y . \int y\,dx = \int \pi y^2 dx$. Or si on fait tourner la courbe autour de l'axe des x, l'aire, dont l'expression est $\int y\,dx$, engendrera un corps dont le volume sera $\int \pi y^2 dx$, et le centre d'inertie de l'aire décrira une circonférence $= 2\pi Y$. Donc le *corps qu'une courbe engendre par sa révolution autour d'un axe, a pour volume le produit de l'aire génératrice, par la circonférence que décrit son centre de gravité.*

Cette dernière proposition a lieu même lorsque l'aire génératrice est comprise entre deux courbes, ou entre deux branches d'une même courbe. En effet la seconde formule (F') donne $2\pi Y \times \int (y - y')dx = \int \pi (y^2 - y'^2)dx$, qui

conduit à la même conséquence, puisque $f(y - y')dx$ est l'aire génératrice, et que $f\pi(y^2 - y'^2)dx$ est l'expression du volume engendré par la révolution de cette aire.

81. Si, par exemple, la circonférence $ADBE$ tourne autour de l'axe XY, en faisant le rayon $CB = a$, et la distance CH du centre à l'axe $= b$, on a pour l'aire qu'elle décrit, cir. $a \times$ cir. $b = 4\pi^2 ab$: et comme cette valeur est double de la voûte annulaire décrite par la demi-circonférence ADB, l'aire de cette voûte est $= 2\pi^2 ab$. De même le volume engendré par l'aire du cercle est. . . . . $=$ cercle $CB \times$ cir. $CH = 2\pi^2 a^2 b$. Si $a = b$, c'est-à-dire, si le cercle tourne autour de sa tangente en B, l'aire décrite $= (2\pi a)^2 =$ le quarré qui a pour côté la circonférence ; le volume $= 2\pi^2 a^3$. Fig. 37.

De même, si le rectangle $ABDC$ tourne autour du côté BD, il engendrera un cylindre : soit $AC = h$, $CD = r$, le côté AC a son centre de gravité au milieu I, qui décrit une circonférence, dont le rayon est r ; donc la surface engendrée, ou l'aire du cylindre $= 2\pi rh$. Comme le rectangle a son centre de gravité à l'intersection G des deux diagonales, le volume du cylindre est Fig. 38.

$$AC \times CD \times \text{cir.} \tfrac{1}{2}CD = \pi hr^2.$$

Enfin le triangle rectangle ABC, en tournant autour du côté AC, engendre un cône, faisons $AB = a$, $BC = r$, $AC = h$; comme le centre d'inertie de la droite AB est au milieu F, il décrit une circonférence, dont le rayon est $\frac{1}{2}.BC$, ou $\frac{1}{2}.r$; l'aire du cône est donc $= \pi ra$. Si le point E est au milieu de BC, et si on prend sur la droite AE une partie $AD = \frac{2}{3}.AE$, D sera le centre de gravité du triangle, et le volume du cône sera. . . $=$ cir. $DO \times BC \times \frac{1}{2}.AC$. Or $DO = \frac{2}{3}.EC = \frac{1}{3}.BC$, donc cir. $DO = \frac{2}{3}.\pi r$, et le volume du cône $= \frac{1}{3}.\pi r^2 h$. Fig. 39.

Ces résultats, déja connus, ne sont mis ici que pour mieux développer la méthode centrobarique; on pourroit d'ailleurs l'appliquer également au cône tronqué, à la sphère, etc.

82. On pourra donc trouver la surface engendrée par la révolution d'une courbe donnée ou le volume engendré par celle de son aire, lorsqu'on connoîtra le centre de gravité de la courbe ou de l'aire génératrice; ce qu'il sera facile de trouver par les formules précédentes, toutes les fois que la courbe sera soumise à une loi donnée par une équation. Si cette courbe ne faisoit pas une révolution entière sur son axe, il seroit aisé de trouver encore l'aire ou le volume engendré, car on a évidemment cette analogie : l'aire ou le volume engendré par une révolution entière est à une circonférence quelconque, comme l'aire ou le volume engendré par une portion de révolution, est à l'arc de cette circonférence qui lui sert de mesure angulaire. Donc *l'aire ou le volume engendré par une révolution entière, ou par une portion de révolution, est égal au produit du chemin que fait le centre de gravité par la courbe ou l'aire génératrice.*

83. Réciproquement aussi, on obtient la circonférence décrite par le centre de gravité d'un arc courbe dans sa révolution autour d'un axe, en divisant la surface qu'il engendre, par la longueur de cet arc même : donc pour avoir la distance du centre de gravité d'un arc à un axe, il faut le faire tourner autour de cet axe, et diviser la surface qu'il engendre, par la circonférence qui auroit pour rayon la longueur de cet arc; ce théorême peut servir dans un grand nombre de cas à trouver le centre de gravité d'un arc. Par exemple pour trouver le centre de gravité de
Fig. 34. MAM', on fera tourner cet arc autour de CD perpendi-

culaire au rayon $AC = a$ qui divise cet arc en deux parties égales; comme la surface engendrée par l'arc sera une zône sphérique, elle sera $= 2\pi a . MM'$: en divisant cette valeur par la circonférence qui a MAM' pour rayon, ou par $2\pi . MAM'$, on a $\frac{a . MM'}{MAM'}$ pour la distance du centre cherché à DC; ce qui s'accorde avec ce qu'on a vu (66).

De même en divisant le solide engendré dans la révolution d'une aire autour d'un axe, par cette aire et par 2π, on aura la distance du centre de gravité de cette aire à l'axe. Ainsi $ABDC$ en tournant autour de BD engendre un cylindre dont le volume est $\pi r^2 h$; l'aire $ABDC = hr$; en divisant donc $\pi r^2 h$ par $rh \times 2\pi$, on a $\frac{1}{2}r$ pour la distance du centre de gravité de $ABCD$ à la ligne BD. On auroit de même $\frac{1}{2}h$ pour la distance de ce point à la ligne CD. Fig. 30.

CHAPITRE III.

DES MACHINES.

* 84. ON appelle *Machines* les agens à l'aide desquels les forces agissent les unes contre les autres. L'industrie et le besoin ont produit de concert ces inventions mécaniques ; on en distingue de *simples* et de *composées*. Il n'y a que trois machines simples, les *Cordes*, le *Plan incliné* et le *Levier* : il ne s'agit pour former des machines composées que de réunir en un même système plusieurs machines simples en les faisant communiquer entr'elles. Au reste tout ce qu'on doit dire des machines n'est, comme on le verra, qu'une suite d'applications très-simples des propositions démontrées précédemment.

* Nous considérerons, dans ce qui va être dit, les machines comme destinées à favoriser une puissance qui lutte contre une autre, que seule elle ne pourroit surmonter, et à établir l'équilibre entr'elles. Quoique ce ne soit pas toujours là le but réel de la machine, celui pour lequel elle a été formée ; on peut, dans tous les cas, supposer que c'est cet effet qu'on veut produire. Nous allons traiter séparément de chaque machine simple, et des machines composées les plus ordinaires, en faisant d'abord abstraction des obstacles qui proviennent de la nature des matières qu'on y emploie, et de leur construction, tels que le frottement, la roideur des cordes, etc., nous réservant d'y avoir égard par la suite.

I. *Des Cordes.*

85. Les CORDES sont assez connues pour que nous nous dispensions de nous étendre sur leur usage : dans ce que nous allons dire, nous les considérerons comme parfaitement flexibles, sans pesanteur, et réduites à leur axe, à moins que nous n'avertissions expressément du contraire. On nomme aussi les cordes des *Machines Funiculaires*. *

Nous appellerons *Tension* d'un cordon la force qui agit à l'une de ses extrémités quand l'autre est fixe : lorsqu'on a deux puissances égales et opposées appliquées à un cordon, l'équilibre a lieu, on peut regarder l'une des extrémités comme fixe, la tension du cordon est l'une des forces qui agissent sur ce cordon. Mais si l'équilibre n'a pas lieu, ce qui arrive lorsque les deux puissances sont inégales, la tension est la plus petite des deux forces : car l'effet de la plus grande est d'anéantir la plus petite, et de l'entraîner dans le sens de sa propre direction avec une force égale à son excès sur elle : or cette dernière partie de l'effet ne peut contribuer à la tension, qui sera la même que s'il n'y avoit que la plus petite des deux forces qui agit.

86. Soient trois forces P, Q et R, sollicitant un point matériel D, à l'aide de trois cordes AD, CD, BD, unies par un nœud en D : il est visible qu'il n'y aura équilibre entr'elles qu'autant que la proposition 19 aura lieu; ainsi le théorême du parallélogramme des forces, et toutes les vérités qu'on en déduit, reçoivent ici leur application immédiate. En général, quelque nombre de forces qu'on considère agissant à l'aide de cordons sur un point matériel, les conditions de l'équilibre, ou la résultante, seront données, savoir : par les valeurs (B, C) ou (F) si les forces Fig. 40.

sont disposées dans le même plan, et par les expressions (J) ou (H) si elles sont dans des plans différens.

★ 87. Mais lorsque toutes les puissances ne sont pas réunies en un même nœud, alors le cordon qui transmet leur action mutuelle des unes aux autres, prend la forme d'un polygone qu'on appelle *Polygone Funiculaire* : portons notre attention sur ce système remarquable, et supposons d'abord que toutes les forces sont dans un même plan.

★ Ainsi soit $P'M'M''M'''$,... le polygone en ques-
Fig. 42. tion, et P', P'', P''' ... des puissances faisant avec une droite quelconque AX menée dans leur plan, des angles α', α'' ... Nommons a', a'', ... les angles que forment les directions des cordons avec cette même droite ; et t', t'', ... les tensions respectives des cordons $P'M'$, $M'M''$, $M''M'''$, ...

★ Cela posé, puisque l'équilibre a lieu dans ce système, il faut qu'il existe dans chaque portion du polygone séparément; que P', P'' et t'' soient en équilibre autour du nœud M', aussi bien que t'', P''' et t''' autour du nœud M'', etc.

Ainsi on aura d'après les équations (F), pour l'équilibre autour des nœuds

$$M' \ldots\ldots \begin{cases} P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' = t'' \cos a'', \\ P' \sin \alpha' + P'' \sin \alpha'' = t'' \sin a''. \end{cases}$$

$$M'' \ldots\ldots \begin{cases} t'' \cos a'' + P''' \cos \alpha''' = t''' \cos a''', \\ t'' \sin a'' + P''' \sin \alpha''' = t''' \sin a'''. \end{cases}$$

$$M^{IV} \ldots\ldots \begin{cases} t''' \cos a''' + P'''' \cos \alpha'''' = t'''' \cos a'''', \\ t''' \sin a''' + P'''' \sin \alpha'''' = t'''' \sin a''''. \end{cases}$$

etc....

En ajoutant les premières équations de chaque groupe, deux, trois, ... ensemble, on a

$$P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + P''' \cos \alpha''' = t''' \cos \alpha''',$$
$$P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + P''' \cos \alpha''' + P'''' \cos \alpha'''' = t'''' \cos \alpha'''',$$
$$\text{etc.} \ldots\ldots$$

En opérant de même sur les secondes équations, on a

$$P' \sin \alpha' + P'' \sin \alpha'' + P''' \sin \alpha''' = t''' \sin \alpha''',$$
$$P' \sin \alpha' + P'' \sin \alpha'' + P''' \sin \alpha''' + P'''' \sin \alpha'''' = t'''' \sin \alpha'''',$$
$$\text{etc.} \ldots\ldots$$

Ces divers résultats étant traités par la méthode déjà employée pour trouver les valeurs (*C*) et (*D*), serviront à faire connoître les tensions et les directions des cordons; c'est-à-dire, donneront t', t'', ... α', α'', ... : les longueurs des côtés sont d'ailleurs arbitraires, et comme le premier et le dernier cordon du polygone sont tendus par les deux forces extrêmes, on a de plus $t' = P'$, $\alpha' = \alpha'$; ainsi que $t^{(n)} = P^{(n+1)}$, $\alpha^{(n)} = \alpha^{(n+1)}$; en désignant par n le nombre des cordons : on pourra donc construire le polygone funiculaire. Enfin on aura

$$P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + \text{etc.} - P^{(n+1)} \cos \alpha^{(n+1)} = 0$$
$$P' \sin \alpha' + P'' \sin \alpha'' + \text{etc.} - P^{(n+1)} \sin \alpha^{(n+1)} = 0.$$

88. Ces équations comparées avec les valeurs (*F*) font voir que *pour que tant de forces qu'on voudra soient en équilibre autour d'un Polygone Funiculaire, il faut que si on transporte ces puissances parallèlement à leurs directions pour les appliquer en un même point, elles soient en équilibre.* On voit que cette conséquence permet de prendre pour ce point chacun des angles du polygone, et qu'ils sont sollicités comme si les forces y étoient immédiatement appliquées. On pourroit d'ailleurs démontrer cette proposition directement; car la tension t'' du cordon $M'M''$, devant faire équilibre aux forces P', P'', est égale à leur résultante; la force qui agit sur le point M''

est donc la même que si deux forces P', P'' y étoient appliquées parallèlement à leurs directions, et ce point est sollicité par les quatre forces P', P'', P''' et t''' : or on feroit voir de même que t''' équivaut aux autres puissances P^{IV}, P^{V}, etc.

Cette conséquence que nous venons de déduire n'est pas particulière au polygone funiculaire plan : on y parviendroit de même en imitant ce qui a été dit ci-dessus, et décomposant les forces parallèlement à trois axes. Nous ne nous arrêterons point sur cette théorie, assez facile pour que chacun puisse parvenir aisément à ce résultat ; de plus, on pourra en conclure que les projections du polygone funiculaire sur chaque plan coordonné sont en équilibre.

89. Si on fait abstraction des deux forces extrêmes P' et P^{n+1}, en raisonnant pour les autres comme on vient de voir, il est clair qu'on peut les transporter parallèlement pour les appliquer toutes au même point : mais comme ces forces sont détruites par les deux forces P' et P^{n+1}, la résultante des premières doit passer par le point de concours de celles-ci. Si donc un cordon AEB, fixé en deux points A et B, a tous ses points sollicités par des forces quelconques, il prendra la courbure AEB ; et le point de concours O des deux tangentes en A et B sera sur la direction de la résultante des forces appliquées aux divers points du cordon. Il en résulte que si on transporte ces forces parallèlement à leurs directions pour les appliquer en O, en décomposant leur résultante Q en deux autres forces dirigées suivant AO et OB (86), on a l'effort exercé sur chacun des points fixes. Fig. 42.

90. Ce cas s'applique visiblement à la pesanteur, puisque d'une part cette force exerce son action sur tous les points

du cordon, et que de l'autre ses efforts peuvent être assimilés à des poids distribués dans toute la longueur de la corde pesante; la courbe qu'elle forme a été nommée *Chaînette*, ou *Courbe Funiculaire*. Il est d'abord visible que cette courbe est plane; en effet, soient des puissances verticales P'', P''', ... appliquées au cordon $P'BCD$; il est Fig. 43. visible que ce polygone est dans un plan; car $P'B$, $P''B$ et BC sont dans un même plan; il en est de même de BC, CP''' et CD, et de plus ce dernier plan est le même que le premier; ainsi des autres. Dans la chaînette, l'effort total exercé sur les points fixes A et B est le poids entier Fig. 42. de la corde; ensorte que si on avoit disposé au point de concours O des deux tangentes menées en ces points, un poids Q égal à celui de la corde, et soutenu par deux fils inextensibles et sans pesanteur AO, BO, les points A et B seroient pressés de la même manière qu'ils le sont par l'action de la pesanteur sur la corde; c'est-à-dire que les deux forces P' et P'' qu'il faudroit employer dans les directions de ces tangentes pour remplacer l'effet des points fixes, seroient les mêmes dans les deux cas. Comme la résultante est le poids Q de cette corde, si on élève en O une verticale indéfinie OE, elle contiendra le centre de gravité, et les efforts exercés en A et B seront proportionnels aux sinus des angles BOE et AOE (19) : ainsi on aura

$$\frac{Q}{\sin.AOB} = \frac{P'}{\sin.BOE} = \frac{P''}{\sin.AOE}.$$

Cela doit même avoir lieu, quels que soient les points A et B pris sur la courbe, puisque l'état d'équilibre permet de considérer comme fixes deux points quelconques pris sur le cours de cette courbe. Si donc on regarde le point F comme fixe au lieu du point B, le reste de la courbe ne changera pas de forme; de plus la tension P' exercée en A

sera encore la même, car on peut, dans la fig. 41, supposer que le point M^{iv} est fixe, sans rien changer à l'état d'équilibre du système; or quoique ce point fixe détermine les forces P^{iv}, P^{v}, ..., il n'altère point pour cela les tensions t', t'', t''', puisqu'elles sont produites par les forces f', f'', f''' auxquelles les puissances P^{iv}, P^{v}, ... faisaient équilibre en exerçant sur le cordon $M^{iii}M^{iv}$ un effort égal à t'''.

Fig. 44. 91. Cherchons l'équation de la courbe AMC formée par une corde inextensible, uniformément grosse, fixée en deux points donnés A et C, et sollicitée dans tous ses points par la gravité. Prenons l'origine en A, l'horisontale AX pour axe des x, et comptons les y verticalement : pour un point M quelconque, nous aurons $AP = x$, $PM = y$ et $AM = s$. Les tensions exercées en A et en M suivant les deux tangentes AD et MD donnent (19)

$$\frac{\text{poids de } AM}{\text{tension en } A} = \frac{\sin.ADM}{\sin.EDM}.$$

Or observons que comme la tension en A est constante, et que le poids de l'arc AM est proportionnel à sa longueur; le premier rapport $= \frac{s}{a}$, a étant une constante indéterminée. De plus $\sin IDF = \frac{dx}{ds}$, $\cos IDF = \frac{dy}{ds}$; en désignant par θ l'angle IAD, on a. . . . . $\sin.ADM = \sin.ADF = \sin.(IDF - IDA)$, ainsi $\sin.ADM = \frac{dx \sin\theta - dy \cos\theta}{ds}$. Donc on a. . . .

$\frac{s}{a} = \frac{dx.\sin\theta - dy.\cos\theta}{dx}$; d'où on tire

$$sdx = adx \sin\theta - ady \cos\theta \ldots\ldots (1).$$

Telle est l'équation différentielle de la chaînette. Pour éliminer une des variables x, y et s on différentie ; et prenant dx constant, on obtient $-dsdx = bd^2y$, en faisant $b = a\cos\theta$. On déduit de là, en mettant $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ pour ds, $-dxdy = \frac{bdyd^2y}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$; or dx étant constant, l'intégrale du second membre est visiblement. . . $b.\sqrt{(dx^2+dy^2)}$; celle du premier membre est $-ydx$, et ajoutant à ce dernier pour constante cdx, (à cause de l'homogénéité. $(c-y)\,dx = b.\sqrt{(dx^2+dy^2)}$. Or $\frac{dy}{dx}$ étant la tangente de l'angle que forme avec l'axe des x la touchante à la courbe en chaque point, si on fait $y = 0$, on devra avoir $\frac{dy}{dx} = \text{tang}\,\theta$: cette condition donne $c = b\sqrt{(1+\text{tang}^2\theta)} = b.\sec\theta$, d'où $c = a$. Donc

$$dx = \frac{bdy}{\sqrt{[(a-y)^2-b^2]}} \ldots\ldots (2).$$

Pour intégrer cette équation on fait $a-y = z$, et on a $dx = \frac{-bdz}{\sqrt{(z^2-b^2)}}$: on rend cette fraction rationnelle en supposant, suivant les principes connus, ... $\sqrt{(z^2-b^2)} = z-t$; on en déduit z et dz en fonction de t, et on a, en substituant, $dx = b.\frac{dt}{t}$; donc. . . . $x = b(\log t + A)$, ou $x = b\{\log[z-\sqrt{(z^2-b^2)}]+A\}$; ou enfin

$$x = b\{\log(a-y-\sqrt{[(a-y)^2-b^2]})+A\}.$$

Cette équation renferme les trois constantes A, a, et b ; or 1°. $x = 0$, doit donner $y = 0$; donc. . . . . $A = -\log[a-\sqrt{(a^2-b^2)}]$, et

$$x = b.\log\left(\frac{a-y-\sqrt{[(a-y)^2-b^2]}}{a-\sqrt{(a^2-b^2)}}\right)\ldots\ldots\ (A'').$$

2°. Si on tire de (2) la valeur de $b.\frac{dy}{dx}$ pour la substituer dans (1), on aura l'équation

$$s = a\sin\phi - \sqrt{[(a-y)^2-b^2]}\ldots\ldots\ (B'')$$

qui donne la longueur de l'arc qui correspond à une ordonnée connue. Si on met les quantités connues AMC et KC pour ϕ et y, cette équation devant être satisfaite, donnera une équation entre a et ϕ. 3°. Enfin, si on met AK pour x, et KC pour y dans (A''), on aura une nouvelle équation entre a et ϕ. Ainsi on pourra trouver les valeurs de ces deux constantes. L'équation (A''), dans laquelle les constantes sont maintenant connues, est celle de la chaînette : elle s'étend à tout le cours de cette courbe considérée comme prolongée de part et d'autre vers A′ et vers C'.

D'après la théorie des *maxima*, on trouve le point B le plus bas de la courbe, en faisant $\frac{dy}{dx} = 0$: cette hypothèse faite dans l'équation (2) donne pour y, $HB = a-b$; l'équation (A'') donne l'abscisse AH de ce point; et (B'') ou (1) donne pour s, $AB = a.\sin\phi$. Il suit de là que pour les valeurs de s qui, telles que AC', sont plus grandes que AB, on devra dans l'équation (B'') faire précéder le radical du signe $+$; et que pour deux points C et C' placés de part et d'autre de B, de manière que $CK = C'K'$, on a $BC = BC'$, et les valeurs de AC et AC' ne diffèrent que par le signe de ce radical.

Concevons une voûte en équilibre composée de petites sphères qui se touchent, et joignons les centres de ces sphères par des lignes droites. Imaginons ensuite que la direction de la pesanteur de ces sphères change tout-à-coup

et se fasse en sens contraire, et que les sphères soient liées ensemble par des fils, ou autrement, de manière qu'elles ne puissent pas obéir à l'impulsion verticale de la pesanteur, il est visible que l'équilibre ne sera point troublé, puisque des puissances qui sont en équilibre continuent d'y être lorsque sans changer ces puissances, on ne fait que leur donner à toutes des directions contraires. Il est visible de plus que dans ce cas la voûte devra former une chaînette, que les *pieds-droits* de cette voûte seront les points fixes, et qu'il n'y aura d'autre différence que dans le renversement de la figure; donc la voûte pour être en équilibre devoit avoir la figure de la chaînette.

92. Il résulte de ce qu'on a dit précédemment, qu'on ne peut tendre une corde pesante en ligne droite, si ce n'est verticalement; car le poids de la corde peut être assimilé à une force appliquée au centre de gravité : or, soit ADC le cordon retenu par les deux forces P et Q; soit R le poids de ce cordon, on a Fig. 40.

$$\frac{P}{R} = \frac{\sin.BDC}{\sin.ADC}.$$

Or, plus la corde est tendue, plus l'angle ADC est grand, et plus aussi BDC approche de l'angle droit; de sorte que pour que la corde soit tendue horisontalement en ligne droite, il faudroit qu'on eût $\frac{P}{R} = \frac{1}{0}$, ou $P = \infty$ tant que R n'est pas nul. Ainsi quelque petite que soit la force R, elle fera courber la corde. C'est ce que l'expérience confirme tous les jours.

93. Si deux forces P et Q agissent à l'extrémité d'un cordon ADC, passé dans un anneau ou nœud coulant D, retenu par une force R, voici les conditions de leur équilibre : 1°. la droite DB doit diviser l'angle ADC en deux également, et 2°. les forces P et Q doivent être égales. En Fig. 40.

effet, si les angles ADB et BDC sont inégaux, la corde glissera au point D, et cette condition combinée avec celle du parallélogramme des forces entraîne l'égalité de P et Q. Donc deux forces P et Q ne peuvent être en équilibre à l'aide d'un cordon passé dans un anneau fixe qu'autant qu'elles sont égales. Il résulte de là que si une corde, aux extrémités de laquelle deux forces P' et $P^{(n)}$ agissent, est
Fig. 41. courbée sur un polygone solide $P'M'M''M'''M^{iv}\ldots$, il faut pour qu'il y ait équilibre que ces deux forces soient égales; car on peut regarder les angles M', M'', ... du polygone comme autant d'anneaux fixes.

Fig. 45. 94. Soient A et B les deux points de suspension d'un cordon AEB auquel est attaché un poids P, ayant un nœud coulant ou un anneau en son point d'attache E avec le cordon : cherchons les conditions d'équilibre de ce système, dont on trouve un exemple dans les *Réverbères* destinés à éclairer les rues.

Menons l'horisontale AC et la verticale CBH, AC et CB sont connus; faisons la longueur AEB du cordon $= h$. Puisque EG partage l'angle AEB en deux parties égales, les angles H et GEB sont égaux : ainsi le triangle EBH est isocèle, et $HE = EB$, enfin $AH = h$. Donc si de A comme centre et d'un rayon $= h$, on trace un arc de cercle, il coupera CH au point H, tel que la perpendiculaire EF, élevée sur le milieu de BH, déterminera le point E de suspension du poids P; cette construction résout donc graphiquement le problème proposé. On peut en trouver aisément une solution analytique.

II. *De l'équilibre d'un corps qui ne peut se mouvoir que sur une ligne, et en particulier sur un Plan Incliné.*

* 95. Il est évident qu'une force N, de direction perpen-

diculaire à un plan AB, sollicitant un point matériel, est entièrement détruite par la résistance du plan, et qu'une force dirigée dans le sens même de ce plan doit avoir son entier effet. Il en résulte que, pour qu'une force unique sollicitant un point matériel sur un plan le laisse immobile, il faut que cette force soit de direction perpendiculaire à ce plan ; car si cette force étoit comme P' dirigée obliquement, on pourroit la décomposer en deux autres, l'une dans le sens même du plan, et l'autre de direction perpendiculaire au plan ; la première devant produire entièrement son effet, le point obéiroit à son action, ce qui est contre l'hypothèse. Fig. 46.

Donc un corps pesant, placé sur un plan, n'y peut être en équilibre que lorsque ce plan est horisontal, puisque la direction de la gravité est verticale. *

Donc aussi pour qu'un système de forces retiennent un point matériel en équilibre sur un plan, il est nécessaire et il suffit que la résultante de ces forces soit perpendiculaire à ce plan : c'est ce que nous allons appliquer. *

Cherchons maintenant les conditions d'équilibre entre deux forces quelconques P' et P'', qui sollicitent un point matériel sur un plan. Décomposons chacune de ces forces en deux autres, l'une perpendiculaire au plan, l'autre dirigée dans le sens du plan. Les premières composantes étant détruites par le plan, il est clair que pour que l'équilibre ait lieu, il faut que les deux composantes, dans le sens du plan, soient *opposées et égales*. La première de ces deux conditions fait voir que le plan des deux forces doit être perpendiculaire au plan donné ; quant à la seconde condition, soit, fig. 46, le plan des forces, et AB son intersection avec le plan donné ; nommons θ' et θ'' les angles que forment les directions des forces avec le plan. Les composantes perpendiculaires au plan sont $Mb = P' \sin \theta'$, *

Fig. 46.

et $Ma = P'' \sin \theta''$, les autres sont $Md = P' \cos \theta'$, et $Mc = P'' \cos \theta''$: on a donc

$$P' \cos \theta' = P'' \cos \theta'' \ldots . (C'').$$

* Ainsi il faut ici pour l'équilibre deux conditions; la première exige que le plan des forces soit perpendiculaire au plan donné; la seconde est renfermée dans l'équation (C''). Quant à la pression qu'éprouve le plan, elle est la somme des composantes Ma et Mb qui lui sont perpendiculaires : soit N cette pression, on a

$$N = P' \sin \theta' + P'' \sin \theta''.$$

En mettant pour P'' sa valeur $\frac{P' \cos \theta'}{\cos \theta''}$, et observant que $\sin \theta'' . \cos \theta' + \cos \theta'' \sin \theta' = \sin (\theta' + \theta'')$, on trouve pour la valeur de la pression dans le cas d'équilibre

$$N = P' . \frac{\sin (\theta' + \theta'')}{\cos \theta''} \ldots . . (D'').$$

* 96. Appliquons cette théorie à la pesanteur. On appelle PLAN INCLINÉ celui qui forme avec un plan horisontal un angle quelconque, et l'inclinaison se mesure par cet angle : c'est celui que forment entr'elles deux droites menées dans chacun de ces plans par un point quelconque de leur ligne d'intersection, perpendiculairement à cette ligne. Puisque l'une des deux forces est ici verticale, et que l'équilibre a lieu, le plan des forces est vertical, et de plus, perpendiculaire au plan incliné : ainsi il doit couper ce plan, et le plan horisontal suivant deux droites AB et AC, formant entr'elles l'angle même des deux plans. Soit M le point matériel pesant; si on abaisse une verticale BC d'un point B de la ligne AB, elle sera contenue dans le plan de la figure qui est vertical : on nomme AC la *base*, BC la *hauteur*, et AB la *longueur* du plan incliné. Soient donc deux forces, l'une P' de direction verticale représentant

Fig. 47.

le poids du point mobile M, l'autre P'' destinée à retenir ce poids en équilibre sur le plan incliné : désignons par ε l'angle d'inclinaison A. Puisque $P'M$ est par hypothèse perpendiculaire sur AC, dans le triangle MAD, on a $\cos\theta' = \sin\varepsilon$, et l'équation (C'') devient

$$P' \sin\varepsilon = P'' \cos\theta'' \ldots\ldots (E'').$$

Mais outre cette condition, il faut que la force P'' soit dans un plan vertical perpendiculaire au plan incliné. Parmi toutes les directions qu'on peut donner à la puissance P'', il y en a deux qui conduisent à des résultats remarquables.

1°. Si P'' agit horisontalement, on a $\theta'' = \varepsilon$, et la formule (E'') devient *

$$P' \sin\varepsilon = P'' \cos\varepsilon, \text{ ou } P'' = P' \operatorname{tang}\varepsilon \ldots (F'').$$

Or, dans le triangle rectangle ABC, on a $\operatorname{tang}\varepsilon = \frac{CB}{AC}$;

donc $P'' = P' \times \frac{BC}{AC}$, d'où $\frac{P'}{P''} = \frac{AC}{BC}$.

Ainsi *le poids du corps est à la force horisontale employée à le retenir en équilibre sur un plan incliné, comme la base de ce plan est à sa hauteur.*

2°. Si P'' agit dans la direction AB du plan incliné, * on a $\theta'' = 0$, et $\cos\theta'' = 1$; la formule (E'') devient donc

$$P'' = P'. \sin\varepsilon = P' \times \frac{BC}{AB}, \text{ d'où } \frac{P'}{P''} = \frac{BA}{BC}.$$

Ainsi *le poids du corps est à la force parallèle au plan incliné, dans le cas d'équilibre, comme la longueur de ce plan est à sa hauteur.*

Quant à la pression qu'éprouve le plan incliné, la valeur * (D'') devient

$$N = \frac{P'}{\cos\theta''} \times \cos(\varepsilon - \theta'') \ldots\ldots (G'').$$

En rapprochant cette expression de l'équation (E''), on a

$$\frac{P'}{\cos\theta''} = \frac{P''}{\sin\varepsilon} = \frac{N}{\cos(\varepsilon-\theta'')} \ldots\ldots (H'').$$

Ainsi *le poids, la puissance et la pression sont respectivement proportionnels aux cosinus des angles formés par la direction de la puissance avec le plan incliné, par ce plan avec la verticale, et par la puissance avec l'horizon.*

1°. Si la puissance P'' a sa direction horisontale, on a $\varepsilon = \theta''$, d'où

$$N = \frac{P'}{\cos\varepsilon} = P' \times \frac{AB}{AC}.$$

On voit alors qu'on a $N > P'$, c'est-à-dire, la pression plus grande que le poids du corps. Si le plan AB étoit horisontal, on auroit $AB = AC$, d'où $N = P'$, ce qui est évident : et si ce plan étoit vertical, on auroit $AC = 0$, et par conséquent $N = \infty$: P'' devient alors perpendiculaire au plan.

2°. Si la force P'' agit dans le sens du plan, on a $\theta'' = 0$, d'où

$$N = P' . \cos\varepsilon = P' \times \frac{AC}{AB}.$$

On voit qu'alors on a $N < P'$. Si le plan AB est horisontal, comme dans ce cas $AB = AC$, on a $P' = N$.

Toute la théorie du plan incliné repose, comme on voit sur les équations générales (C'') et (D'') : nous observerons que néanmoins on auroit pu démontrer tous les théorêmes précédens, en appliquant immédiatement au cas de la pesanteur les raisonnemens généraux qui nous ont conduits aux valeurs (C'') et (D'').

Si le point matériel étoit sollicité par un nombre quelconque de forces, on décomposeroit chacune d'elles en deux autres, l'une perpendiculaire au plan, l'autre dans

le sens du plan; et il ne s'agiroit que d'écrire entre ces dernières composantes les équations d'équilibre (F, n°. 23) entre des forces disposées dans un même plan.

97. Si le point mobile est sur une courbe ou sur une surface courbe, en considérant la tangente, ou le plan tangent mené au point où le mobile est placé, on peut y appliquer ce qu'on a dit (95); ainsi la force qui sollicite un point mobile ne peut le laisser en équilibre sur cette courbe ou sur cette surface courbe, qu'autant qu'elle est dirigée suivant la normale. Nous ne dirons rien ici de l'équilibre sur une surface courbe, ou sur une courbe à double courbure : on peut consulter à cet égard la *Mécanique philosophique*, numéros 95 et 96.

Soit une courbe plane DZ, dont $y = fx$ est l'équation Fig. 48.
$AP = x$, $PM = y$; et un point M sollicité par un nombre quelconque de forces : cherchons la condition d'équilibre. Nommons X et Y les sommes des composantes respectivement parallèles aux axes des x et des y (23). La tangente en M fait avec l'axe des x un angle, dont le sinus est $\frac{dy}{ds}$, et dont le cosinus est $\frac{dx}{ds}$, s représentant l'arc de courbe DM. Or, on a pour les composantes de X et Y dans le sens de

$$\text{La tangente} \ldots X \cdot \frac{dx}{ds}, Y \cdot \frac{dy}{ds}.$$

$$\text{La normale} \ldots X \cdot \frac{dy}{ds}, Y \cdot \frac{dx}{ds}.$$

Il devra y avoir égalité entre les composantes dans le sens de la tangente, et la pression N sera la somme des deux autres composantes : donc

$$Xdx = Ydy, \text{ et } Nds = Xdy + Ydx \ldots . \ (I'').$$

La première de ces équations fera connoître l'une des

forces X ou Y; on donnera l'équation $y=fx$ de la courbe DZ lorsque ces forces seront connues; pour que l'équilibre ait lieu en un point quelconque M. Si la courbe DZ étoit donnée, ainsi que les forces X et Y, cette équation serviroit à trouver x et y, c'est-à-dire les coordonnées du point où l'équilibre a lieu sur la courbe. Ainsi, soient des puissances données sollicitant un point matériel enfermé dans un canal curviligne; d'un point à l'autre la tangente variant d'inclinaison, les composantes dans le sens de cette tangente doivent aussi varier : l'équation précédente, combinée avec celle de la courbe, servira à faire connoître l'x et l'y du point de cette courbe où l'équilibre doit avoir lieu.

Si on met pour ds et $\frac{dy}{dx}$ leurs valeurs $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, et $\frac{X}{Y}$ dans dans la seconde équation, on trouvera . . . . $N=\sqrt{(X^2+Y^2)}$, ce qui est d'ailleurs évident, car la résultante de X et de Y est $=\sqrt{(X^2+Y^2)}$, (18).

Si on prenoit pour l'équation de la ligne DZ celle d'une ligne droite, c'est-à-dire, $y=ax+b$, les équations précédentes feroient trouver de nouveau les théorèmes 95 et 96 ; nous ne nous arrêterons pas à faire ces calculs, qui n'ont aucune difficulté.

Fig. 49. 98. Soient deux points matériels m, m', disposés sur deux plans inclinés *adossés* AC, CB (ainsi qu'on le voit *fig.* 49), et unis par un fil inextensible mCm', passé dans la gorge d'une poulie C : on demande les conditions d'équilibre de deux forces P, P', agissant sur ces points, et formant avec les plans AC et BC les angles θ et θ'.

Les pressions exercées sur les plans sont les composantes perpendiculaires $P\sin\theta$, $P'\sin\theta'$; mais elles ne se cumulent pas comme précédemment. Pour qu'il y ait équi-

libre à l'aide de la poulie C, d'après ce qu'on verra (106), il faut que les composantes dans le sens des plans soient égales. On a donc $P \cdot \cos\theta = P' \cdot \cos\theta'$.

Si les forces P et P' sont verticales, en nommant ι et ι' les angles formés par les plans avec la base horisontale AB, on a $\cos\theta = \sin\iota$, et $\cos\theta' = \sin\iota'$, ainsi $P \cdot \sin\iota = P' \cdot \sin\iota'$, ou

$$P \times \frac{CD}{AC} = P' \times \frac{CD}{CB}, \text{ ou enfin } \frac{P}{P'} = \frac{AC}{CB}.$$

Ce cas a lieu quand les forces P et P' sont les poids des deux corps m et m'. Ainsi *deux poids en équilibre sur deux plans inclinés, sont entr'eux comme les longueurs de ces plans.*

99. Soient deux poids m, m', placés sur les courbes AF et EB, et attachés au fil mCm' passé dans la gorge de la poulie infiniment petite C; cherchons deux courbes AF et EB telles que l'équilibre subsiste entre ces poids, quelles que soient d'ailleurs leurs positions respectives sur ces courbes. Fig. 50.

Menons la verticale CN par le point C, et supposons que les équations des deux courbes, rapportées à cette ligne comme axe, soient $y = fx$ pour la courbe AF, $y' = Fx'$ pour la courbe EB : le point C étant d'ailleurs pris pour origine commune des x et des x'. Cela posé, nommons a la longueur mCm' du fil; faisons $Cm = z$, $Cm' = z'$; nous aurons

$$z + z' = a, \quad z^2 = x^2 + y^2, \quad z'^2 = x'^2 + y'^2 \ldots (1).$$

Le poids est une force qui agit dans la direction verticale mb; en représentant cette puissance par mb, et formant le parallélogramme $mdbc$, elle sera décomposée en deux autres, l'une md agissant dans le sens du fil Cm; l'autre mc dirigée

dans le sens de la normale mN. Or, on a

$$CN = x + \text{sounorm.} = \frac{x\,dx + y\,dy}{dx} = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{d(x^2+y^2)}{dx} = \frac{z\,dz}{dx};$$

d'ailleurs les triangles semblables mdb, CmN donnent

$$\frac{md}{mb} = \frac{Cm}{CN};\ \text{donc}\ md = \frac{m\,dx}{dz}.$$

En opérant de la même manière pour le poids m'', on a $\frac{m'\,dx'}{dz'}$ pour sa composante dirigée suivant Cm' : ces deux composantes doivent être égales dans le cas d'équilibre (106). Or l'équation $z + z' = a$ donne $dz = -dz'$; donc

$$m\,dx + m'\,dx' = 0,\ \text{ou}\ mx + m'x' = A \ldots . (2).$$

Ce résultat fait voir que quelque position que l'on fasse prendre aux poids m et m', le centre de gravité de leur système doit toujours rester sur la même ligne horisontale : car d'après les équations (A'), la distance de ce centre à l'horisontale GH est $\frac{mx + m'x'}{m + m'}$, valeur qui, à cause de l'équation (2), devient $\frac{A}{m + m'} =$ constante.

Lorsque la courbe AF sera donnée, et qu'on voudra trouver la courbe EB, propre à l'équilibre, il ne s'agira que de joindre aux équations (1) et (2), celle de AF, et d'éliminer entre cinq équations, qui contiennent les six variables x, y, z; x', y', z'; afin d'obtenir une relation entre x' et y'. La constante arbitraire A sera déterminée d'après la considération du point E où la courbe BE rencontre la verticale CN; ou d'après la position donnée d'un point quelconque de cette courbe.

Si, par exemple, la ligne AF est droite, et si la poulie

C est placée, comme dans la fig. 49, en son point de rencontre avec la verticale CD, en nommant ε l'angle qu'elle fait avec l'horison, l'équation $y = fx$ devient ici $y \cdot \text{tang}\,\varepsilon = x$. Pour éliminer, reprenons les deux premières équations (1), et mettons $\frac{x}{\text{tang}\,\varepsilon}$ pour y; elles donneront $z = a - z'$, et $z = \frac{x}{\sin\varepsilon}$; égalant ces deux valeurs, on en tire $x = (a - z')\sin\varepsilon$, ce qui change la valeur (2) en $m(a - z')\sin\varepsilon + m'x' = A$. Si on veut que la courbe cherchée passe en C, il faut que x' et z' soient nuls en même tems, ce qui donne $A = ma\sin\varepsilon$; donc on a

Fig. 49.

$$m'x' = mz'\sin\varepsilon.$$

Enfin élevant au quarré, et mettant $x'^2 + y'^2$ pour z'^2, on trouve

$$y' = x' \cdot \sqrt{\left(\frac{m'^2 - m^2\sin^2\varepsilon}{m^2\sin^2\varepsilon}\right)}.$$

pour l'équation de la ligne cherchée. Elle conduit d'ailleurs au résultat énoncé n° 98 : car il est clair que cette ligne est droite; et comme en nommant ε' l'angle qu'elle fait avec l'horison, son équation doit être $y' = x' \cdot \frac{\cos\varepsilon'}{\sin\varepsilon'}$; en comparant cette équation à la précédente, on en déduit $m\sin\varepsilon = m'\sin\varepsilon'$.

100. Un point matériel est en équilibre sur un plan lorsque la résultante des forces qui le sollicitent est perpendiculaire à ce plan : lorsqu'il s'agit d'un corps, cette condition n'est plus suffisante; en effet une force perpendiculaire à un plan, n'est détruite que parce qu'on la suppose appliquée en son point même de rencontre avec ce plan. Lorsqu'un corps est posé sur un plan, cette hypothèse n'est permise qu'autant que ce point fait partie du

corps, c'est-à-dire, est un de ceux de sa base en contact avec le plan. Si le corps ne pose sur le plan que par différens points, comme une table sur ses pieds, pour que la force perpendiculaire soit détruite, il faut qu'on puisse la décomposer en d'autres qui lui soient parallèles et qui passent par ces points ; ce qui exige visiblement que son point de rencontre avec le plan, tombe dans l'intérieur du polygone qu'on forme en joignant ces points par des droites.

Il suit de là que

* 1°. Lorsque deux forces agissent sur un corps posé sur un plan, il faut pour l'équilibre qu'elles soient dans un même plan perpendiculaire au plan donné ; que leur résultante ne laisse pas tous les appuis d'un même côté, et qu'enfin l'équation (C'') ait lieu.

* 2°. Lorsqu'une de ces deux forces est la pesanteur, il faut que l'autre force rencontre la verticale passant par le centre de gravité du corps ; qu'elle soit dans un plan vertical perpendiculaire au plan incliné ; que la résultante ne laisse point ses appuis d'un même côté ; enfin qu'on ait l'équation (E''). Les deux théorêmes qu'on en a déduits ont également lieu ici, suivant que la force qui retient le corps sur le plan incliné est horisontale ou verticale. On a aussi la conséquence tirée de l'équation (H'').

* 3°. Lorsqu'un corps n'a qu'un seul point de contact avec un plan, il faut, pour qu'il y ait équilibre, que la résultante des forces qui le sollicitent soit perpendiculaire au plan, et passe par ce point. S'il s'agit d'un corps pesant, il faut de même que le plan soit horisontal, et que la verticale dirigée par le centre de gravité passe par le point de contact. C'est ce que nous éprouvons tous les jours ; le centre de gravité de notre corps est placé verticalement au-dessus de nos pieds, et est transporté alterna-

tivement au-dessus de chacun d'eux, lorsque nous marchons, ce qui donne à notre corps un léger balancement. Un corps pesant est donc d'autant plus près de sa chûte, que la verticale abaissée de son centre d'inertie sur le plan horisontal sur lequel il est placé, approche davantage du contour de sa base de contact. C'est pour cela que les murs les moins élevés, et dont les fondations ont une plus grande épaisseur, sont ceux qui ont le plus de solidité.

101. Quand une puissance pousse un corps perpendiculairement contre un plan, elle exerce une pression qui se distribue sur tous les points de contact du corps avec ce plan: c'est ainsi qu'un poids presse le plan horisontal sur lequel il repose. S'il y a n points de contact, pour trouver l'effort exercé sur chacun d'eux, il faut observer que la force se décompose en d'autres qui agissent sur ces points: s'il est question du poids P d'un corps, on le regarde comme une force verticale passant par le centre de gravité; il faut alors décomposer ce poids en n autres forces parallèles passant par les points de contact du corps avec le plan. Soient donc x', y'; x'', y''; ... $x^{(n)}$, $y^{(n)}$; les coordonnées de ces points; x et y celles du point où la verticale passant par le centre de gravité rencontre le plan: enfin soient p', p'', ... $p^{(n)}$ les composantes de P; les expressions (S) deviendront

$$\begin{aligned} P &= p' + p'' + \ldots p^{(n)}, \\ Px &= p'x' + p''x'' + \ldots p^{(n)}x^{(n)}, \\ Py &= p'y' + p''y'' + \ldots p^{(n)}y^{(n)}. \end{aligned}$$

Ces équations, les seules auxquelles les forces p', p'', ... $p^{(n)}$ doivent satisfaire, serviront à les déterminer lorsqu'il n'y aura que trois points de contact, car il y aura dans ce cas autant d'équations que d'inconnues. Mais s'il y a plus de trois points de contact, le problème sera indéterminé. Si

le corps et le plan ne se touchent que par trois points en ligne droite, le problème sera encore dans le même cas; car en regardant cette droite comme axe des x ou des y, l'une des équations ci-dessus devient inutile.

102. Soit un corps pesant placé en équilibre sur deux plans inclinés : cet état ne peut exister qu'autant que la résistance de ces plans détruit le poids du corps : si donc on élève en leurs deux points de contact avec le corps des perpendiculaires, elles devront se rencontrer en un des points de la verticale passant par le centre de gravité, afin que le poids du corps puisse être décomposé en deux autres forces de directions perpendiculaires aux plans : les composantes seront les pressions exercées sur ces plans. Il résulte de là que *le plan qui passe par les appuis et par le centre de gravité, doit être vertical; et de plus perpendiculaire aux deux plans inclinés, et à leur intersection qui sera par conséquent horisontale.*

Tout ce que nous venons de dire n'est pas particulier au cas d'un corps sollicité uniquement par la gravité; et s'il y avoit dans le système des forces quelconques, il faudroit dire de leur résultante ce qu'on vient d'exposer sur la verticale passant par le centre de gravité.

Fig. 51. Le plan de la fig. 51 est supposé être celui des pressions; K et I sont les appuis; les pressions ont pour directions KO et OI perpendiculaires aux plans inclinés AB et BC, elles concourent en O, sur la verticale OS qui passe par le centre de gravité G du corps KGI : UZ est un plan horisontal passant par l'intersection B des plans inclinés, Menons l'horisontale HI; représentons le poids P du corps par GS; prenons $OR = GS$; et enfin achevons le parallélogramme QF; ces pressions seront représentées par $QO = Q$, $FO = F$; et comme les deux triangles

OQR, HIB ont leurs côtés perpendiculaires, le poids P, et les pressions Q et F sont proportionnels aux côtés HI, HB et BI, ou plutôt aux sinus des angles qui leur sont opposés dans le triangle HBI; ainsi on a

$$\frac{P}{\sin.HBI} = \frac{Q}{\sin.IBZ} = \frac{F}{\sin.HBU}.$$

Donc, *si le poids du corps est représenté par le sinus de l'angle que les deux plans font entr'eux, les pressions exercées sur chacun d'eux sont réciproquement proportionnelles aux sinus des angles qu'ils forment avec l'horison.*

Les conditions de l'équilibre des parties d'une voûte et la pression exercée sur chacune d'elles par ses voisines, c'est-à-dire, des *Voussoirs* les uns sur les autres, sont des conséquences de cette proposition. Voyez à cet égard l'*Architecture hydraulique de Prony*.

III. *Du Levier.*

103. On appelle LEVIER un corps retenu par un axe ou un point fixes, et sollicité par des forces quelconques : tout ce qui a été dit dans le chapitre premier doit ici recevoir son application; ce qui résout le problême du levier dans l'état le plus général : nous ne regarderons ici le levier que comme une verge inflexible, sollicitée par deux puissances, et retenue en un point fixe.

Soient P', P'' les deux forces; BAC un levier non pesant; $AN = p'$, $AM = p''$: il est clair qu'il ne faut ici qu'une seule équation d'équilibre, qui exprime que *les momens des forces par rapport au point fixe sont égaux.* En effet, les forces ne peuvent être en équilibre qu'autant qu'elles ont leur résultante détruite par la résistance de l'appui; ainsi ces forces sont dans le même plan, et leur

Fig. 6.

p' et p'' les perpendiculaires abaissées du point fixe A sur leurs directions ; I' et I'' les centres de gravité des branches AB et AC, dont on considère les poids Q' et Q'' comme deux nouvelles forces appliquées à ces centres : q' et q'' les distances de l'appui A aux verticales $I'Q'$, $I''Q''$; on a quatre forces dont les momens, par rapport au point fixe A, doivent être égaux : la condition d'équilibre est par conséquent exprimée par l'équation

$$P'p' + Q'q' = I''p'' + Q''q'' \ldots . \quad (M'').$$

On a souvent deux puissances M et P verticales, dont m et p sont les bras de levier : la balance appelée *Romaine* est dans ce cas ; cette machine, composée d'un *fléau* retenu par un axe fixe, sert à peser tous les corps qu'on suspend à l'un de ses bras à l'aide d'un poids constant qu'on applique à l'autre bras, à une distance convenable de l'axe. Fig. 52.

Ces sortes d'instrumens portent des divisions à la branche sur laquelle glisse le poids constant, pour s'approcher ou s'éloigner de l'axe, jusqu'à ce que le fléau soit horisontal : et l'aspect de ces divisions fait juger sur-le-champ du poids du corps qui est suspendu à l'autre bras. Voici la théorie d'après laquelle ces divisions sont marquées. Soient M', M'', .. les divers poids qu'on suspend successivement en B ; m, p', p'',... leur distance à l'axe, et celles du poids constant P qui leur fait équilibre : Q', Q'' les poids des bras du fléau ; q', q'', les distances de leurs centres de gravité à l'axe. L'équation (M'') donne Fig. 53 bis.

$$M'm + Q'q' = Pp' + Q''q'', \quad M'''m + Q'q' = Pp''' + Q''q'',$$
$$M''m + Q'q' = Pp'' + Q''q'', \quad M^{iv}m + Q'q' = Pp^{iv} + Q''q'', \text{ etc.}$$

En retranchant successivement la première de ces équations de la seconde, la deuxième de la troisième, etc., on en déduit

$$p'' - p' = \frac{M'' - M'}{P} \cdot m,\ p''' - p'' = \frac{M''' - M''}{P} \cdot m,\ \text{etc.}$$

Si les poids M', M'', ... sont en progression arithmétique, on a $M'' - M' = M''' - M'' =$ etc., d'où $p'' - p' = p''' - p'' =$ etc. les divisions sont donc égales entr'elles : et si on veut qu'elles soient de plus égales au plus petit bras, c'est-à-dire $= m$, on aura $p'' - p' = m$, d'où $P = M'' - M'$; alors P n'est plus arbitraire.

On construit ordinairement cet instrument de manière à ce qu'il soit en équilibre, sans les poids M', ... P. On a alors $Q'q' = Q''q''$; d'où on conclut $M'm = Pp'$; et dans le cas où on veut que les divisions soient $= m = p'$, on a $M' = P = M'' - M'$; d'où $M'' = 2M'$. Ainsi le poids constant P fera successivement équilibre à des poids M', $2M'$, $3M'$, ... puisque M' est la raison de la progression.

* 105. La *Balance* ordinaire est un levier du premier genre dont les deux bras ou *fléaux* AE, EB sont égaux ; les forces en équilibre doivent donc aussi être égales. L'un des *bassins* C porte la substance qu'on veut peser ; l'autre contient le poids D qui lui fait équilibre. Une aiguille gy, perpendiculaire à la direction du levier, est fixée au-dessus de l'axe de suspension ; cet axe est lui-même soutenu par deux couteaux x et y, sur une *chappe* Mf verticale ; les directions de l'aiguille et de la chappe doivent coïncider dans le cas d'équilibre. Il est inutile d'insister sur une machine aussi simple, et d'un usage aussi familier : mais il est à observer que si les bras de levier ne sont pas égaux, les poids ne peuvent pas l'être non plus, et la balance est fausse. Il est aisé de reconnoître la supercherie ; car en changeant les poids de bassins, celui qui est le plus foible aura un bras de levier plus court, et il n'y aura plus équilibre.

Fig. 54.

Quoiqu'une telle balance paroisse peu propre à peser, on peut cependant s'en servir avec avantage ; et le moyen que nous allons indiquer à cet effet, doit être employé dans toutes les opérations où on veut obtenir des résultats très-justes, même lorsque les balances sont exactes, parce qu'on sent assez que cette exactitude n'a lieu qu'à-peu-près. Soit Y le poids inconnu ; P le poids qui lui fait équilibre ; y et p les deux bras de levier : on devra avoir dans le cas d'équilibre $Yy = Pp$. Si on change les poids de bassins, c'est-à-dire de bras de levier : il faudra employer un nouveau poids P' pour mettre Y en équilibre, et on aura encore $Yp = P'y$. Le produit de ces deux équations donne

$$Y^2 = PP', \quad \text{ou } Y = \sqrt{(PP')};$$

c'est-à-dire, que le *poids cherché est moyen proportionnel entre les deux poids* P *et* P′ *qui lui font tour-à-tour équilibre.*

IV. *De la Poulie.*

106. On peut regarder la POULIE comme une machine composée du levier : elle consiste en une espèce de roue, ou de cylindre d'épaisseur arbitraire ; on la fait ordinairement circulaire, et c'est dans cet état que nous l'examinerons ici. Sa surface courbe est creusée en gorge : au centre est un axe *fixe* ou *mobile* ; une corde est passée dans cette gorge, et dans le cas où l'axe est fixe, les puissances sont appliquées aux deux extrémités du cordon : voyez fig. 55. Quand la poulie est mobile, comme dans la fig. 56, le cordon a l'une de ses extrémités fixe, et la seconde puissance agit sur l'axe même. * Fig. 55 et 56.

La poulie, fixe ou mobile en équilibre, peut être regardée comme sollicitée par trois puissances P', P'' et R, * Fig. 57.

la dernière étant appliquée à l'axe, opposée et égale à la résultante des deux autres. Ainsi le moment de R, par rapport à cet axe, est nul, et on a les momens de P' et P'' égaux (29), ou plutôt $P' = P''$, car les perpendiculaires GE et EH sont égales : (on peut d'ailleurs regarder ces deux forces comme agissant aux extrémités des bras de leviers égaux GE et EH). Donc *la poulie fixe ne sert qu'à changer les directions des deux puissances qui agissent aux extrémités du cordon, puisque ces forces doivent être égales :* et dans la poulie mobile (fig. 56) la pression qu'éprouve le point fixe est égale à la puissance qui agit à l'une des extrémités du cordon.

* 107. La pression qu'éprouve l'axe dans le cas de la poulie fixe, ou la force qui agit sur cet axe dans la poulie mobile, est la résultante R des forces P' et P'' : ainsi elle est la diagonale AD du rhombe, construit sur les lignes égales AB et AC qui représentent ces forces : si donc on nomme ζ l'angle $P''AE$, moitié de $P'AP''$, on aura (17)

$$R = 2P'\cos\zeta \ldots\ldots (N'').$$

Cette équation donne le rapport qui existe entre les deux puissances dans le cas d'équilibre de la poulie mobile. On peut dire aussi que les triangles GEH et ABD ayant leurs côtés perpendiculaires, les forces R et P' sont proportionnelles à GH et GE, ou $\frac{R}{P'} = \frac{GH}{GE}$; donc *dans l'état d'équilibre de la poulie mobile, la puissance* P′ *est à la force* R *appliquée à l'axe, comme le rayon de la poulie, est à la corde de l'arc embrassé par le cordon.*

* Si la poulie mobile étoit pesante, il faudroit regarder le poids R comme formé du poids dont elle est réellement chargée, augmenté du poids de la poulie.

108. Concevons maintenant un système de plusieurs poulies mobiles, comme on le voit dans la fig. 58. La poulie C' ne peut tourner sans entraîner la suivante C'', et ainsi des autres; ainsi le poids R montera par l'action de la force M. Soient donc t', t'', ... $t^{(n)}$ les tensions des cordons ; $2\zeta'$, $2\zeta''$, ... $2\zeta^{(n)}$ les arcs embrassés par les cordons. On a pour l'équilibre, en vertu de l'équation précédente, savoir : Fig. 58.

autour de la poulie
$$\begin{cases} C' \ldots\ldots R = 2t'\cos\zeta' \\ C'' \ldots\ldots t' = 2t''\cos\zeta'' \\ C''' \ldots\ldots t'' = 2t'''\cos\zeta''' \\ \qquad\qquad \text{etc.} \\ C^{(n)} \ldots\ldots t^{(n-1)} = 2t^{(n)}\cos\zeta^{(n)} = 2M\cos\zeta^{(n)}. \end{cases}$$

Si on multiplie entr'elles les deux, trois, etc. premières de ces équations, on déterminera aisément t', t'', etc., c'est-à-dire, la tension de chaque cordon : si on les multiplie toutes, on aura pour la relation entre les deux forces M et R, l'équation

$$R = 2^n \times M(\cos\zeta'.\cos\zeta''.\cos\zeta'''\ldots.\cos\zeta^{(n)})\ldots (O'').$$

Il suffit donc de connoître les directions des cordons pour trouver le rapport entre les forces R et M.

109. Lorsque deux forces parallèles R et M sont appliquées aux deux extrémités d'un cordon passé sur une poulie fixe, il suit de ce qu'on a vu (30), que le théorême du n°. 107 a encore lieu: la résultante R, ou la pression exercée sur l'axe, est égale à la somme des forces, ou plutôt au double de l'une d'elles ; et comme alors $\zeta = 0$, la formule (N'') s'applique encore à ce cas. Il est même visible que lorsque la poulie est mobile, la force M a alors la direction la plus favorable pour retenir en équilibre la force R, puisqu'elle est la plus petite possible.

Si on a un système de poulies mobiles dont les cordons soient parallèles, alors $\cos\zeta' = \cos\zeta'' = \text{etc.} = 1$, et l'équation (O'') se réduit à $R = 2^n M$; d'où on tire $\frac{M}{R} = \frac{1}{2^n}$;

la force est à la résistance comme l'unité est à la puissance de 2 marquée par le nombre des poulies mobiles.

On peut employer ce système de poulies pour aider les forces à faire équilibre à des résistances considérables; ainsi qu'on peut le voir d'après l'équation $R = 2^n M$. Mais on doit observer que pour élever le poids R à la hauteur a, il faut développer une longueur de corde $= 2^n a$: de sorte que ce que l'on gagne du côté de la puissance, est perdu du côté du tems. En effet, la dernière poulie ne peut monter de a, sans que les deux cordons qui embrassent sa gorge ne se raccourcissent eux-mêmes, chacun d'une pareille longueur; ce qui fait que la puissance aura fait passer dans cette gorge une longueur de corde $= 2a$. L'avant-dernière poulie devra donc monter de $2a$, pour que la dernière s'élève seulement de a. Par la même raison, les cordons de l'avant-dernière poulie doivent se raccourcir chacun de $2a$, pour qu'elle s'élève aussi de la hauteur a; ce qui forcera la poulie suivante de monter de $2^2.a$, et ainsi de suite.

On appelle *Mouffle* une machine composée de plusieurs poulies portées par une même chappe : on assemble (comme on le voit dans les fig. 59) une mouffle mobile avec une mouffle fixe; de sorte qu'un même cordon, tiré par une force M, embrasse tour-à-tour les poulies; la mouffle mobile porte un poids R. Puisque chaque poulie doit être en équilibre en particulier, toutes les portions du cordon éprouvent la même tension : on peut donc regarder ces tensions comme autant de forces égales employées à soutenir le poids R : en supposant les cordons parallèles, ce qui a ordinairement lieu d'une manière sensible, le poids R se distribue également sur tous les cordons qui sont employés à soutenir la mouffle mobile. Soit n le nombre de ces cordons : on a donc $R = Mn$.

V. *Du Treuil.*

110. Le TREUIL ou TOUR est une machine composée * d'un cylindre et d'une roue qui ont le même axe, et qui font corps ensemble : cet axe a ses deux extrémités placées sur deux appuis ou tourillons ; une corde est enveloppée autour du cylindre, et est attachée à une résistance, ou supporte un poids. On imprime à la roue un mouvement de rotation sur l'axe ; elle fait tourner le cylindre autour duquel la corde en s'enveloppant surmonte la résistance, ou élève le poids. Ce mouvement de rotation est donné à la roue, soit à l'aide d'une corde qui est enveloppée sur cette roue, et qu'une puissance sollicite, soit en garnissant les jantes de cette roue de chevilles auxquelles on applique des forces, ou sur lesquelles des hommes montent en agissant par leur poids.

Quelquefois au lieu d'une roue on se sert de deux leviers * qui traversent le cylindre, fig. 61 ; ou de *Manivelles*, fig. 62 : mais les effets sont les mêmes ; la révolution est seulement moins uniforme ; la machine a d'ailleurs l'avantage d'être moins embarrassante. Au reste, pour les conditions d'équilibre, toutes ces dispositions sont indifférentes. L'axe du cylindre peut être horisontal, comme dans le treuil, la *Roue de carrière*, fig. 60, la *Grue* qui sert dans les bâtimens, fig. 63, etc. Il est vertical dans le *Cabestan*, fig. 64, machine dont on se sert pour amener peu-à-peu des fardeaux considérables. Fig. 61 et 62. Fig. 63 et 64.

Dépouillons le tour de tout appareil extérieur inutile ; * *AB* est l'axe du cylindre que nous supposons horisontal, *A* et *B* sont ses appuis ; *FCD* est la roue, *D* son centre. La force *P* est appliquée à l'extrémité de la corde *FP* tangente à la roue *F*, et dans le plan de cette roue, Fig. 65.

qui est perpendiculaire à l'axe ; la résistance, que nous représentons par un poids Q, est attachée à la corde QH qui enveloppe le cylindre ; le plan perpendiculaire à l'axe passant par cette corde, coupe ce cylindre suivant le cercle GHI. Si de plus on conçoit par l'axe un plan horisontal, il coupera le plan de la roue suivant MD, et le cercle GHI suivant GH; CD et GH seront les rayons de la roue et du cylindre ; faisons $CD = p$, et $GH = q$: de plus, H sera le point de la surface du cylindre où la corde HQ cesse de le toucher; on pourra donc concevoir le poids Q suspendu en ce point.

Soit ε l'angle FMD que forme la direction de la force P avec l'horison ; représentons cette force par la partie MN; construisons dans le plan de la roue, qui est vertical, le rectangle OR, dont le côté horisontal OM soit le prolongement de MD. On pourra décomposer la force P en deux autres, l'une $MO = P \cos \varepsilon$, horisontale ; l'autre $MR = P \sin \varepsilon$, verticale. La première est détruite, car on peut la concevoir appliquée en D, et supposer qu'elle n'a par conséquent d'autre but que de faire sortir l'axe de ses appuis : quant à la seconde, elle est parallèle au poids Q; et employée en entier à le soutenir. Menons la droite MH, elle sera horisontale, et rencontrera en K l'axe du cylindre ; on pourra la considérer comme un levier dont l'appui est en K sur l'axe. Les forces Q et R sont parallèles, on doit donc avoir (105) $R \times MK = Q \times KH$, ou $R \times MD = Q \times GH = Qq$, à cause de la similitude des triangles MDK, et KHG : mettant $P \sin \varepsilon$ pour R, et $\frac{p}{\sin \varepsilon}$ pour MD, on obtient $Pp = Qq$. Ainsi dans l'équilibre du tour, *les momens des puissances, par rapport à l'axe du cylindre sont égaux* ; ou si on veut, *la puissance est*

à la résistance comme le rayon du cylindre est au rayon de la roue.

On observera que ce résultat n'est autre chose que celui qui a été démontré (42), pour les équations de l'équilibre de rotation autour d'un axe fixe : en effet, ces deux puissances étant dans des plans perpendiculaires à l'axe, leurs composantes parallèles à cet axe sont nulles. On pourra donc remplacer la démonstration précédente par ce qui a été dit n° 42.

111. La corde dont on se sert dans le treuil, est communément d'un diamètre qu'on ne peut négliger. L'action des puissances se transmet par l'axe de la corde ; il est évident que son rayon doit être ajouté d'une part à celui du cylindre, et de l'autre à celui de la roue. La proposition précédente devient donc ; *la puissance est à la résistance qui lui fait équilibre dans le Tour, comme la somme des rayons du cylindre et de la corde, est à la somme des rayons de la corde et de la roue.*

Si donc la corde s'est enveloppée autour du cylindre, et en a couvert entièrement la surface, pour qu'elle continue de s'enrouler, elle doit former un second rang ; ainsi on doit augmenter la puissance.

112. Quant aux pressions exercées sur les deux appuis A et B, il est aisé de les calculer : en effet, elles se composent, 1°. de l'action de la puissance ; 2°. du poids total de la machine ; 3°. de la résistance, c'est-à-dire du poids à élever. Les deux forces Q et $R = P \sin \varepsilon$ peuvent être toutes deux remplacées par leur résultante $Q + R$ appliquée verticalement en K. De plus la force $MO = P \cos \varepsilon$ agit horisontalement en D : enfin le poids total de la machine agit au centre de gravité. Cela posé, il sera aisé, d'après ce qui a été dit (33 et 47), de décomposer chaque

force en deux autres, agissant l'une en A et l'autre en B. On aura par là en chacun de ces deux points deux forces, l'une horisontale provenant de MO, l'autre verticale produite par les autres puissances. Soient λ et λ' les forces verticales, et μ et μ' les forces horisontales agissant en A et en B. L'effort exercé en A étant la résultante des forces λ et μ, sera $= \sqrt{(\lambda^2 + \mu^2)}$, (18); l'effort en B sera $\sqrt{(\lambda'^2 + \mu'^2)}$: et les tangentes respectives des angles formés par ces efforts avec l'horison sont $\frac{\lambda}{\mu}$ et $\frac{\lambda'}{\mu'}$. Or, comme les quantités λ, λ', μ et μ' sont données, on connoîtra la grandeur et la direction des efforts exercés en A et B. On observera seulement que comme le point K change sans cesse, ces deux choses varient à mesure que la corde s'enroule.

VI. *Des Roues dentées.*

* 113. Une ROUE DENTÉE est un cylindre mobile autour Fig. 66. de son axe, et dont la surface est munie de filets parallèles à cet axe : ces filets ou *dents* s'engagent dans ceux qu'on forme de même sur une autre roue dentée; et cet *engrenage* est tel, que dès que l'une est mise en mouvement autour de son axe, l'autre tourne en sens contraire; les largeurs des dents, et les intervalles qui les séparent, doivent être égaux dans les deux roues. Voyez la fig. 66.

* Sur l'axe de chaque roue dentée, on en adapte ordinairement une autre, qui fait corps avec elle, et est d'un diamètre moindre : cette roue s'appelle *Pignon*; ses dents se nomment *Ailes*. Alors chaque roue dentée engrène dans le pignon de la suivante, comme on le voit dans la fig. 66. Si une force M fait tourner la première roue A, son pignon a fera mouvoir la roue B; de même celle-ci *mènera*

la roue C, etc. Enfin on adapte à la dernière roue E, au lieu de pignon, un cylindre non denté, autour duquel est roulée une corde qui soutient un poids R, ou qui est sollicitée par une force R. Cherchons les conditions d'équilibre entre la puissance M et la résistance R, aussi bien que les efforts exercés sur les dents des roues.

On observera que chacune de ces roues et son pignon * ne sont autre chose qu'un tour : on a donc ici à considérer un système de tours. La manière dont nous allons résoudre le problême proposé, n'appartient pas seulement aux roues dentées, mais l'esprit de la méthode doit être appliqué à toute machine composée, comme nous aurons occasion de le voir par la suite, et comme nous l'avons déja fait (108).

La roue A entraîne son pignon a, celui-ci mène la * roue B; désignons par P' l'effort exercé par les ailes du Fig. 66. pignon contre les dents de la roue : soient de même P'', P''', ... les efforts exercés par les ailes des pignons b, c, ... sur les dents des roues C, D, ... avec lesquelles ils engrènent. De plus soient r', r'', ... $r^{(n)}$, etc. les rayons des roues; s', s'', ... $s^{(n)}$ les rayons des pignons; l'accent $^{(n)}$ est relatif à la dernière roue. Généralement les rayons sont les distances respectives de chaque axe au point de contact de la dent avec l'aîle du pignon d'engrenage; mais comme ce point varie à mesure que le système se meut, on peut prendre, par approximation, une distance moyenne : nous entendrons donc ici par rayons, les longueurs comprises entre les axes et le point qui est au milieu de la longueur des dents.

Cela posé, M et P' sont deux forces en équilibre autour * du treuil A, leurs directions sont tangentes à la roue et au cylindre; de même pour les autres : on aura donc pour la condition d'équilibre

$$\text{autour de la roue}\begin{cases} A \ldots\ldots\ldots Mr' = P's' \\ B \ldots\ldots\ldots P'r'' = P''s'' \\ C \ldots\ldots\ldots P''r''' = P'''s''' \\ \text{etc.} \ldots\ldots\ldots \text{etc.} \\ \text{Dernière.} \ldots P^{(n-1)}r^{(n)} = Rs^{(n)}. \end{cases}$$

* Multiplions entr'elles les deux premières équations, ou les trois premières, etc. nous aurons, en réduisant

$$Mr'r'' = P''s's'', \quad Mr'r''r''' = P'''s's''s''', \text{ etc.}$$
$$Mr'r''r''' \ldots\ldots r^{(n)} = Rs's''s''' \ldots\ldots s^{n} \ldots\ldots (P'').$$

Ces expressions servent à déterminer les pressions $P', P'', \ldots$ la dernière donne le rapport entre les forces M et R; elle fait voir que *la force et la résistance sont entr'elles comme le produit des rayons des pignons est au produit des rayons des roues.* Ainsi deux forces très-inégales peuvent être mises en équilibre à l'aide d'un système de roues dentées, et les effets de la puissance M se trouvent par là beaucoup plus grands qu'ils ne l'auroient été sans le secours de ce système.

114. On observera que les roues ne font point leur tour entier dans le même tems; car la roue B étant supposée de 100 dents, et le pignon a de 10 ailes, à chaque tour de la roue A et de son pignon, la roue B ne fait que le dixième d'un tour. De sorte qu'il faut 10 tours du pignons a pour que la roue B fasse un tour entier, et ainsi des autres. Soient $q', q'', \ldots q^{(n)}$ les nombres de dents des roues, $k', k'' \ldots k^{(n)}$ les nombres d'ailes des pignons; $N', N'' \ldots N^{(n)}$ les nombres de tours que font en même tems ces diverses roues. Après N' tours, le pignon a aura fait passer $N'k'$ ailes dans les dents de roue B; pareillement cette roue faisant dans le même tems N'' tours, aura fait passer $N''q''$ dents dans les ailes du pignon a : or il en a dû passer autant de part et d'autre; donc on a $N'k' = N''q''$; en

raisonnant de même pour les autres roues, on trouve

$$\text{pour le pignon}\begin{cases} a \ldots\ldots\ldots N'k' = N''q'' \\ b \ldots\ldots\ldots N''k'' = N'''q''' \\ c \ldots\ldots\ldots N'''k''' = N''''q'''' \\ \text{etc.} \ldots\ldots\ldots \quad \text{etc.} \\ \text{l'avant-dernier.} \quad N^{(n-1)}k^{(n-1)} = N^{(n)}q^{(n)}. \end{cases}$$

On peut, comme ci-dessus, multiplier ces équations deux à deux, trois à trois, etc. pour connoître les nombres de tours que font les roues dans le même tems. Si on les multiplie toutes, on a

$$N'k'k''k''' \ldots k^{(n-1)} = N^{(n)}q''q'''q'''' \ldots q^{(n)} \ldots \quad (Q'').$$

Ainsi les *nombres de tours de la première et de la dernière roue sont entr'eux comme le produit des nombres de dents des roues est au produit du nombre des ailes des pignons.* On observe qu'ici $k^{(n)}$ et q' n'entrent pas, parce qu'il n'y a ni dents à la première roue, ni ailes au dernier pignon, ou du moins parce qu'ils sont inutiles à l'état du système.

On peut donc se servir de l'équation précédente pour trouver les nombres de dents et d'ailes d'un rouage, en supposant connus les nombres de tours de la première et de la dernière roue : mais on voit qu'ici le problême est très-indéterminé, car il consiste à trouver, (outre le nombre de roues qui est arbitraire) k', k''...$k^{(n-1)}$, q'', q'''...$q^{(n)}$, étant donné $N^{(n)}$ et N' : mais comme ces valeurs sont toutes entières (ce que les horlogers appellent des *nombres rentrans*), cela particularise un peu la question.

Si, par exemple, on veut employer cinq roues, et faire en sorte qu'à chaque tour entier de la première E, à

laquelle on suppose le moteur R appliqué, la dernière A, en fasse 2800.

On fera $N^{(n)} = 1$, $N' = 2800$, et l'équation (Q'') donne $2800 . k' . k'' . k''' . k'''' = q'' . q''' . q'''' . q^{v}$. On peut disposer arbitrairement de toutes ces quantités, moins une : mais comme cette dernière devra être un nombre entier, on emploiera l'analyse ordinaire, et on verra qu'entr'autres hypothèses, on pourra avoir

$$\text{Nombre des ailes du pignon.} \begin{cases} a \ldots k' = 10 \\ b \ldots k'' = 10 \\ c \ldots k''' = 12 \\ d \ldots k'''' = 12 \end{cases} \qquad \text{Nombre des dents de la roue.} \begin{cases} E \ldots q^{v} = 84 \\ D \ldots q'''' = 80 \\ C \ldots q''' = 80 \\ B \ldots q'' = 75 \end{cases}$$

Fig. 66. 115. Il est facile de comprendre maintenant le mécanisme des horloges. Un poids ou un moteur est appliqué à la roue E, à l'aide d'une corde roulée autour d'un cylindre e. L'action de ce poids fait tourner cette roue, qu'on appelle *roue de Cylindre ;* elle met le système en mouvement. Voici les nombres de dents et d'ailes qu'on peut employer.

Roue E ou de *cylindre* 84 dents; elle mène le pignon d de 12 ailes.
Roue D . . . . . 80 dents; . . . . . c de 12 ailes.
Roue C ou des *minutes* 80 dents; . . . . . b de 10 ailes.
Roue B . . . . . 75 dents; . . . . . a de 10 ailes.

La roue A s'appelle roue d'*Echappement* ; nous la supposerons armée de 30 dents ; en voici l'usage. Il est clair que si rien n'arrêtoit les roues, l'action du poids R feroit tourner avec rapidité tout le système, jusqu'à ce que la corde eR se fût entièrement développée de dessus le cy-
Fig. 67. lindre. Mais si à la dernière roue A on imagine un *pendule*, c'est-à-dire un corps pesant M fixé à l'extrémité d'une verge ML ; et si de plus une *Ancre* KI fait corps avec cette verge, et oscille avec elle, il est aisé de voir

ce qui arrivera : chaque fois que le corps *M* se trouvera en oscillant, de l'autre côté de la verticale, la branche *I* de l'*Ancre* s'élèvera, et ne retenant plus sa dent, celle-ci s'*échappera*, et la roue tournera · mais il ne pourra passer qu'une dent ; car l'autre branche *K* de l'ancre s'abaissera en même tems que le point *I* s'élèvera, celle-là retiendra donc la dent qu'elle rencontrera ; et ainsi de suite, de sorte qu'il ne s'échappera qu'une dent à chaque oscillation.

Nous ne pouvons ici donner de détails sur le pendule et la théorie des oscillations (194) ; mais si la longueur *ML* est telle que ses oscillations se fassent de seconde en seconde, la roue *A* n'aura fait un tour entier qu'en 60 secondes, ou une minute. Si donc l'axe de la roue d'échappement porte une aiguille *GH*, mobile avec elle, et si on adapte sur le même centre un cadran fixe, dont la circonférence soit divisée en 60 parties égales, l'extrémité *H* se présentera successivement à tous les points de division de ce cadran, et y marquera les secondes.

Chaque tour que la roue *B* fera, correspondra à $7\frac{1}{2}$ tours faits par la roue *A*, puisque celle-là est armée de 75 dents, tandis que le pignon *a* a 10 aîles : la roue *B* fera donc son tour en 450 secondes, c'est-à-dire, à chaque demi-quart-d'heure. Le pignon *b* a 10 dents, la roue *C* en a 80 ; elle fera donc son tour en une heure, et on pourroit marquer les minutes sur un autre cadran, si on en disposoit un sur son axe, comme pour la roue d'échappement. La roue *D* fera son tour en 6 h. $\frac{3}{4}$, et enfin la roue *E* fera un tour en 46 h. $\frac{1}{3}$. Fig. 66.

On peut faire porter par l'axe de la roue *C* un second pignon de 7 aîles, qui mènera une roue de 84 dents ; celle-ci fera son tour en 12 heures. Nous n'entrerons pas ici en détail sur les dispositions les plus convenables des roues, et sur les nombres des dents et des aîles. Ces nombres

peuvent être très-différens de ceux que nous venons d'employer : il est d'ailleurs rare qu'on se serve de plusieurs cadrans pour marquer les secondes, les minutes et les heures ; et souvent il n'y a qu'un seul cadran, du centre duquel on fait sortir les axes destinés à porter les aiguilles. Voyez le traité d'horlogerie de *Berthoud*.

116. Au lieu d'imprimer le mouvement à la machine à l'aide d'un poids R, ce qui l'empêche d'être portative, on adapte à la roue E un cylindre creux, nommé *Tambour* ou *Barillet* ; son axe ou *Arbre* ne fait point corps avec lui, et est fixé d'une manière invariable aux platines de l'horloge : de sorte que le tambour peut tourner sur son axe immobile. Un ressort spiral, qu'on nomme *grand ressort*, est caché dans le tambour ; il a l'une de ses extrémités fixée au limbe intérieur du cylindre ; l'autre est à l'arbre même. Si donc on fait tourner le barillet, le ressort se serrera autour de l'arbre en l'enveloppant, et fera effort pour se développer et faire tourner le barillet en sens contraire. Ainsi il imprimera à la machine un mouvement de rotation, et remplacera le poids R. Le barillet ne peut
Fig. 68. tourner que dans un sens, car il fait corps avec une roue F à dents obliques, dans lesquelles est engagée une languette AB, pressée par une lame d'acier CD. Il en résulte que quand on veut tendre le ressort, il faut tourner le barillet dans un sens : alors la roue F glisse sur l'encliquetage AB ; mais lorsque l'on abandonne le barillet à lui-même, il tourne, entraîne (*fig.* 66) la roue E et le reste du système.

Dans les horloges portatives, appelées *Montres*, le régulateur du mouvement ne pouvant être un pendule, on emploie un autre mécanisme. La tige de l'aiguille des minutes
Fig. 69. fait mouvoir une dernière roue AB : une tige CD porte deux *palettes* f et g qui engrènent tour-à-tour dans les dents

de la roue *AB*, qu'on nomme *roue de Rencontre*, et à laquelle on donne un nombre de dents impair, afin que chaque dent soit diamétralement opposée à un espace vide, et que par là deux dents ne puissent jamais rencontrer à-la-fois les *Palettes* de la tige *CD*, qui porte une roue *HK*, non dentée, qu'on nomme *Balancier*. Cette roue reçoit donc son mouvement de la roue de rencontre, et elle oscille à l'aide d'une petite lame spirale *hkl*, qui est capillaire, et dont l'une des extrémités est fixée en *h* aux platines, tandis que l'autre l'est à la tige du balancier en *l*. Cette spirale, en se roulant et se développant alternativement, remplace le pendule : de sorte que la roue de rencontre avance d'une dent chaque fois que le balancier achève deux vibrations. La rapidité du mouvement dépend de la longueur du filet spiral *hkl*, de sorte qu'on l'augmente ou la diminue en accourcissant ou allongeant ce filet, ce qui se pratique à l'aide d'un arrêt disposé à cet effet. Dans les montres ordinaires, le balancier fait 17,280 vibrations par heure. On peut voir, dans la *fig.* 70, comment ces différens rouages sont disposés. Mais comme le tems des oscillations du balancier dépend sur-tout de la force de pression exercée sur les palettes par l'action du grand ressort, à mesure qu'il se développe par l'effet du mouvement, cette pression diminue : il s'ensuit que les tems des oscillations seroient inégaux, si on n'y remédioit par un mécanisme particulier. La *Fusée* est une espèce de roue tronquée *B* : le tambour *A*, au lieu d'être adhérent, comme dans la *fig.* 68, à la première roue, forme une pièce distincte. La surface de la fusée est munie d'un plan incliné, en forme d'*Hélice*, destiné à recevoir une chaîne qui s'y enveloppe. Le grand ressort transmet son action à la fusée, à l'aide de cette chaîne. On voit que, par ce mécanisme ingénieux, le bras de levier de la puissance croît, à me- Pl. 70.

sure que le ressort se débande, ce qui tend à égaliser ses effets. Lorsque le ressort est détendu, la chaîne enveloppe entièrement le barillet, en laissant la fusée à nud : une clef, dans laquelle on insère le *quarré P*, sert à faire tourner le corps de la fusée en sens contraire; par là la chaîne se déroule de dessus le barillet, et le forçant à tourner dans le même sens, tend de nouveau le ressort, et reporte la chaîne sur la fusée; cette pièce ne fait pas corps avec la roue *F* qui a le même axe; le déclic, disposé dans son intérieur, permet à la fusée de tourner dans un sens sans la roue *F*, et par conséquent sans rien déranger à la situation des autres roues; tandis que cette fusée ne peut tourner dans l'autre sens sans entraîner toutes les pièces : c'est pour cela que quand on monte une montre, les aiguilles ne prennent aucun mouvement.

Le tems qu'une horloge peut marcher sans avoir besoin d'être montée dépend de plusieurs causes, 1°. des nombres des roues, de leurs dents, et des aîles des pignons; 2°. de la longueur du pendule : il y en a qui ne battent que les quarts de seconde; 3°. de la force du ressort enfermé dans le barillet; ou de la longueur de la corde qui soutient le poids moteur, et de la grandeur de la circonférence du cylindre sur lequel elle se roule. Il arrive même que, d'après les principes développés n°. 116, on adapte quelquefois à cette corde des mouffles, pour que le poids descendant moins rapidement, la machine n'ait pas aussi souvent besoin d'être remontée.

On n'oubliera pas que la grandeur d'une roue n'est plus arbitraire dès que le nombre des dents qu'elle doit avoir est déterminé; en effet, dans deux roues qui s'engrènent, les grandeurs des dents et les intervalles qui les séparent doivent être égaux : on conclut de là qu'en général *les nombres de dents des roues doivent être proportionnels à*

de la force P à la roue d'un treuil. D'ailleurs leurs bras de leviers sont r et R, par là l'équation précédente devient

$$Qh = 2\pi RP \ldots\ldots (R'').$$

Cette équation ne renfermant pas r, est indépendante de la distance à laquelle le point pesant est supposé de l'axe : elle seroit donc encore la même si on eût pris le point n ailleurs sur la vis. Cette observation va nous conduire à un résultat général : car cette équation seroit encore vraie si l'écrou, au lieu de ne toucher la vis qu'en un seul point, la touchoit en un nombre quelconque de points. En effet, dans ce dernier cas, chacun porteroit une portion du poids Q : ces portions étant désignées par Q', Q'', etc., donneroient $Q' + Q'' + Q'''$ + etc. $= Q$. Mais, d'un autre côté, la force P qui porte le poids de l'écrou, peut être considérée comme la somme d'autant de forces partielles P', P'', etc., qu'il y a de points de contact, lesquelles seroient employées à porter respectivement chacun des poids Q', Q'', ...; on aura donc les équations

$$Q'h = 2\pi RP', \quad Q''h = 2\pi RP'', \quad Q'''h = 2\pi RP''', \text{ etc.}$$

dont la somme donne l'expression (R''). Ainsi, en général, *dans l'équilibre de la vis, la puissance est à la résistance, comme le pas de la vis est à la circonférence que la puissance tend à décrire.*

Il est facile de conclure de l'équation ci-dessus que

1°. La vis est une machine composée du levier et du plan incliné;

2°. Pour une même vis, l'effet est d'autant plus grand, que la force est appliquée plus loin de l'axe;

3°. Pour deux vis différentes, et un même bras de levier, une force a d'autant plus d'avantage, que le pas de la vis est moindre.

IX. *Du Coin.*

* 121. Soit BD un prisme triangulaire de matière très-
Fig. 79. dure; on l'insère par l'arête ou *tranchant* AB dans une fente faite à un corps, et frappant sur la *tête* ou face opposée DC, on le fait entrer avec force, et par là on sépare les parties de ce corps. Cette machine se nomme COIN : on s'en sert pour fendre, ou pour obtenir de grandes pressions; les couteaux, haches, poinçons, dents, griffes, etc. sont des coins.

* Pour déterminer la grandeur de la force qu'on doit appliquer à la tête du coin pour fendre un corps, il est clair qu'il faudroit connoître d'abord la résistance à vaincre : or cette résistance dépend d'une foule de circonstances particulières, qui ne sont presque jamais connues. La théorie physique du coin est donc fort obscure; c'est pour cela que nous nous étendrons peu sur cet article.

* Nous supposerons que la puissance P est de direction
Fig. 80. perpendiculaire à la tête AB du coin. Si la chose n'avoit pas lieu ainsi, on ramèneroit, par une simple décomposition, la question à cet état. Pour bien poser le problême, concevons qu'une corde horisontale FD, passant par les points de contact des faces du coin avec le corps, s'oppose à la séparation des parties : l'action de la puissance fait acquérir à cette corde une tension qu'il s'agit de déterminer, ainsi que la pression sur le plan horisontal qui porte le système. Désignons par a, b, c les côtés du triangle ABC, opposés aux angles A, B et C; et par α et ζ les inclinaisons de ces côtés sur $Q'R'$; c'est-à-dire, que $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $\alpha = BFQ'$, $\zeta = ADR'$.

* Il est d'abord visible que la résistance des points D et F ne peut détruire l'action de la force P, qu'autant qu'elle

peut être décomposée en deux autres Q et R passant par ces points, et de directions perpendiculaires aux faces du coin : donc ces trois forces doivent concourir en un même point. Ainsi on a (19), $\frac{P}{\sin.QER}=\frac{Q}{\sin.PER}=\frac{R}{\sin.PEQ}$. Au lieu des angles QER, PER, et PEQ, on peut substituer leurs supplémens C, A et B, ou plutôt les côtés c, a et b qui leur sont opposés dans le triangle BAC, et qui sont par conséquent proportionnels à leurs sinus : on a donc $\frac{P}{c}=\frac{Q}{a}=\frac{R}{b}$, d'où on tire

$$R=\frac{b}{c}P,\ Q=\frac{a}{c}P\ \ldots\ (S'').$$

Pour connoître les effets des forces Q et R dans le sens horisontal et dans le sens vertical, il faut décomposer chacune d'elles en deux autres Q', Q''; R', R''; qui aient ces directions : ce qui donne (18)

$$\left.\begin{array}{ll} Q'=\frac{a}{c}.P\sin\alpha; & Q''=\frac{a}{c}.P\cos\alpha \\ R'=\frac{b}{c}.P\sin\zeta; & R''=\frac{b}{c}.P\cos\zeta \end{array}\right\}\ \ldots\ (T'').$$

Cela posé, 1°. la pression sur le plan horisontal qui porte le système, est visiblement la résultante des forces R'' et Q''; cette pression est donc $Q''+R''=\frac{P}{c}(a\cos\alpha+b\cos\zeta)$.

2°. Il résulte de ce qu'on a dit (85), que le système obéit à deux effets; le premier est de tendre la corde DF avec une force égale à la plus petite des deux puissances Q' et R', le second est de mouvoir horisontalement le système dans le sens de la plus grande, avec une force égale à l'excès de celle-ci sur la première.

122. Il arrive ordinairement que le triangle ABC est isocèle ; comme alors $a = b$, les deux valeurs de R et de Q sont égales entr'elles, et on a $R = Q = \frac{a}{c} . P$: la force P doit d'ailleurs être appliquée au milieu N de la tête du coin, pour que les trois forces P, Q, R concourent en un même point. Q' et R' sont égales, aussi bien que Q'' et R'', et que α et ζ. On a donc 1°. pour la pression sur le plan horisontal $2R'' = 2\frac{a}{c} \times P \cos \zeta$; or $\alpha = \zeta = BAC$; donc cette pression est $\frac{2P}{c} \times BN = P$, ce qui est évident. 2°. Pour la tension de la corde FD

Fig. 81.

$$Q' = Q . \cos FCE = \frac{a}{c} \cos FCE \times P = \frac{CN \times P}{c}.$$

Ainsi *la force* P *est à la tension de la corde* FD, *comme la tête du coin est à sa hauteur.*

Cette corde n'est d'ailleurs mue dans le sens FD par aucune force, puisque les puissances horisontales Q' et R' se détruisent.

En rapprochant cette exposition de celle qu'on a faite pour le plan incliné, il est facile de voir le rapport qu'elle a avec cette dernière, et avec la théorie de l'équilibre des voûtes. On voit d'ailleurs que la force P agit à l'aide du coin avec d'autant plus d'avantage, que CN est plus grand, et que c est plus petit ; c'est-à-dire, que l'angle C est plus aigu.

X. *Des Machines composées.*

123. Les dernières machines que nous venons d'examiner sont, à proprement parler, simples ; il arrive souvent qu'une d'elles ne suffit pas seule à l'objet auquel on la des-

leurs rayons, puisqu'ils doivent l'être à leur circonférence, en n'oubliant pas ce qu'on a dit p. 113, sur ce qu'on doit entendre par le rayon d'une roue.

117. Il arrive quelquefois que les roues dentées n'ont pas leurs axes parallèles ; voici, dans ce cas, la disposition qu'il convient de leur donner. Concevons deux cônes ADE et AEF, qui, ayant leurs sommets en un même point A, et leurs axes AB et AC fixes, auroient leurs surfaces tangentes suivant un de leurs côtés : si on imagine ces surfaces revêtues de filets disposés dans le sens de ces côtés, l'un des cônes ne pourra tourner sur son axe sans entraîner l'autre, et le faire tourner en sens contraire. Si donc, par un même point du filet en contact, on fait passer deux plans, perpendiculairement à l'axe de chaque cône, ils couperont ces cônes et en détacheront deux troncs, revêtus de filets, qui feront l'office de dents. Ces roues n'auront pas leurs axes parallèles, et néanmoins engrèneront. Fig. 71.

On peut aussi disposer ces roues comme on le voit dans les figures 72. Fig. 72.

VII. *Du Cric.*

118. Concevons une barre AB, dentée d'un côté, et retenue dans une chappe KL. Si un pignon E engrène avec les dents de la barre, et si on fait tourner ce pignon, la barre prendra un mouvement de translation. Cette machine s'appelle CRIC : son usage est d'élever le poids qu'on applique à l'extrémité A de la barre. Pour mettre le pignon en mouvement, on se sert d'une manivelle, disposée comme on le voit dans la figure. Fig. 73.

Soit P la puissance appliquée à la manivelle dont le rayon EF est R, soit r le rayon du pignon, et Q la résistance à vaincre en A. Il est visible que cette résistance peut être

supposée immédiatement appliquée sur la dent du pignon en contact avec la barre; ainsi (110) les momens des deux forces, par rapport à l'axe du pignon, doivent être égaux; et on a $RP = Qr$. Donc *la puissance est à la résistance dans l'équilibre du cric comme le rayon du pignon est à celui de la manivelle.*

* Lorsqu'on a produit l'effet demandé, si la puissance P appliquée à la manivelle cessoit son action, le poids Q feroit redescendre la barre, en forçant le pignon à tourner en sens contraire. Pour empêcher la puissance P d'exercer continuellement son action, on dispose un encliquetage, comme à la fig. 68, afin d'empêcher le pignon de tourner dans l'autre sens.

* On observera qu'on se sert fréquemment de manivelles à bras courbés; mais par rayon de la manivelle, il faut entendre ici le rayon du cercle que la force P tend à décrire, et non la longueur rectifiée de ce bras.

* Le cric que nous venons de décrire est appellé *Cric simple;* Fig. 74. voici la description du *Cric composé.* On dispose entre le pignon E et la barre une ou plusieurs roues dentées armées de leurs pignons; le pignon E n'agit plus alors immédiatement sur cette barre; mais les effets de la puissance se transmettent en les multipliant. Il est inutile de s'étendre sur une théorie aussi facile, puisqu'elle rentre dans celle des roues dentées : on en conclut que *dans le cric composé la force* P *est à la résistance* Q, *comme le produit des rayons des pignons est au produit des rayons des roues par le bras de la manivelle.*

VIII. *De la Vis.*

* 119. Le triangle isocèle GFB, en tournant autour de Fig. 75. l'axe AZ, engendre par sa révolution deux cônes tron-

qués opposés par leurs bases. Mais si outre le mouvement de rotation, ce triangle a encore un mouvement de translation dans le sens de l'axe AZ, de sorte que pour diverses portions de révolution de ce triangle, son plan s'avance dans le sens de AZ de parties proportionnelles aux valeurs angulaires qu'il a décrites, et que de plus après une révolution entière le point B soit en G, et le triangle en $G'F'G$; et ainsi de suite.... Ce triangle engendrera un solide qu'on nomme Vis. La distance AD s'appelle le *pas de la vis*. Au reste il n'est pas nécessaire que le polygone générateur soit un triangle : on peut employer aussi un rectangle, et on a alors une vis à filet quarré.

On nomme *Ecrou* une autre pièce sillonnée intérieurement comme la vis l'est elle-même en relief; l'un est pour ainsi dire le moule de l'autre; de sorte que l'écrou est le solide engendré par le polygone $GHCBF$, dans sa révolution autour de AZ, en s'avançant dans le sens de cette ligne, comme dans la génération de la vis.

La vis n'est donc qu'un cylindre revêtu d'un cordon spiral de grosseur uniforme, et dont l'inclinaison, par rapport à la génératrice du cylindre, est constante : l'écrou, au contraire, est un solide creusé de la même manière. L'une de ces deux pièces est fixe; l'autre est mobile dans le sens de sa génération, et peut par là s'insinuer comme en rampant sur la première.

120. La courbe que l'un quelconque des points du polygone générateur tel que N, décrit autour de AZ se nomme *Hélice*. Cette courbe est évidemment tracée sur la surface d'un cylindre droit qui a AZ pour axe et EN pour rayon de sa base : le rectangle $edcf$ dont la base dc est égale à la circonférence qui a EN pour rayon, est donc le développement de ce cylindre. Soit $da = AD =$ le pas de la vis; l'hypothénuse bd est le développement d'une révolu- Fig. 75 et 76.

tion entière de l'hélice décrite par le point N : en effet il résulte de la génération de cette courbe qu'en prenant pour abscisses des arcs de la circonférence de la base de ce cylindre, les ordonnées correspondantes doivent croître proportionnellement aux abscisses : soit donc pris l'un des points d de l'hélice pour origine, $y = ax$ sera l'équation de cette courbe développée : or cette équation est celle d'une droite, et on sait d'ailleurs qu'elle doit passer par le point b qui répond à une révolution complette.

* Nous supposerons ici que la vis est fixe, et que l'écrou
Fig. 77. est mobile à l'aide d'une force P appliquée à l'extrémité d'un levier $CP = R$, perpendiculaire à sa direction, et agissant dans le sens horisontal. Soit Q le poids que l'écrou supporte, ou la résistance qui s'oppose à l'effet de la force P. Si l'écrou ne posoit que sur l'un des points de la vis, en supposant ce point à une distance r de l'axe, il seroit
Fig. 76. placé en un point n du développement de l'hélice qui le porte : or ce point, pesant autant que l'écrou, seroit sur la vis comme sur un plan incliné bd. La force M appliquée horisontalement suivant Mn, pour retenir ce point en équilibre, doit satisfaire à l'équation (F'') qui est ici

$$M = Q \text{ tang } i = Q \cdot \frac{cb}{cd} = \frac{Q.h}{\text{cir}.r} = \frac{Q.h}{2\pi r}$$

en faisant $bc = h$. Lorsque l'hélice n'est pas développée, cette force M est perpendiculaire à l'arête du cylindre qui passe par le point n, et qui contient cette hélice ; cette force agit dans une direction tangente à ce cylindre.

* Maintenant remplaçons cette force M subsidiaire, par la puissance P, qui est celle qui exerce effectivement son action : pour que les deux forces M et P équivalent, il faut (110, 42) que l'on ait $PR = Mr$; puisque la force M est tangente à un cylindre, et qu'on peut assimiler le levier

tine ; alors on en dispose plusieurs ensemble de la manière la plus convenable, et la perfection consiste à employer les moyens les plus simples et les plus faciles. Nous ne pouvons ici entrer en détail sur les machines composées, et on peut consulter à cet égard des ouvrages dont l'objet est différent du nôtre ; nous nous occuperons seulement de faire voir comment on peut appliquer le calcul, et trouver le rapport entre la puissance et la résistance. Dans la vis et les roues dentées, nous avons déja fait des applications de l'esprit de la méthode qu'on doit employer à cet effet ; nous allons la rendre encore plus sensible par quelques exemples fort utiles.

1°. *De la Vis sans fin.*

124. Le cylindre qui a pour rayon $cr = r$, porte sur son axe une roue dentée dont le rayon est $Rc = R$; cette roue fait corps avec le cylindre, sur lequel une corde roulée soutient un poids P : une vis AB dans une situation horisontale, est posée sur deux tourillons A et B : le pas de cette vis est $EF = h$; elle engrène avec la roue : enfin sur l'axe de la vis est une manivelle dont le bras est $BC = a$. La force Q, en imprimant un mouvement à la vis, fera tourner le cylindre et monter le poids. Cette machine a été nommée VIS SANS FIN. * Fig. 82.

Proposons-nous de connoître, dans le cas d'équilibre, le rapport entre les forces P et Q, et la pression X exercée contre les filets de la vis. Il est clair que puisque l'équilibre existe entre les puissances Q et X, on a (120), $hX = Q.\text{cir}\, a$; pareillement on a pour l'équilibre entre les forces P et X, (110) $Pr = XR$; en multipliant ces deux équations, on trouve *

$$Phr = QR \times \text{cir}\, a \;\ldots\; (U'').$$

Ainsi dans l'équilibre de la vis sans fin la puissance est à la résistance comme le produit du rayon du cylindre par le pas de la vis est au produit du rayon de la roue par la circonférence que décrit la puissance.

2°. *Du Pont-Levis.*

Fig. 83. 125. La figure 83 est le profil d'un PONT-LEVIS. Cette machine est composée du *Tablier CD*, et de deux longues pièces de bois, profilées en *EB*. On nomme *Bascule* la partie *EA* de ces pièces; elles sont liées entr'elles par des traverses de bois; l'autre partie *AB* est appelée *Flèche;* chaque flèche a son extrémité unie au tablier par une chaine, représentée en *BC*. En *A* et *D* sont des tourillons, qui permettent aux flèches et au tablier de s'incliner par rapport à l'horison.

On dispose le tablier de manière à servir de plancher, à l'aide d'un assemblage de pièces de bois : tout le système peut être mis en mouvement par une force convenable appliquée en *E* : de sorte qu'on peut employer le tablier à servir de pont, ou de porte, suivant qu'on le met horisontalement ou verticalement. Proposons-nous de trouver la force propre à produire ce mouvement; pour cela supposons que les chaines ne forment qu'une ligne droite *BC*, et que le pont-levis est mis dans une position quelconque. Désignons par α, ζ et γ les angles formés par l'horisontale, avec les flèches, avec le tablier et avec la chaine; c'est-à-dire, que $BAX = \alpha$, $CDI = \zeta$, $CBK = \gamma$: on aura $DCB = \zeta + \gamma$. Soient enfin $AE = b$, $AB = f$, $DC = t$; puis T, C et F les poids du tablier, de la chaine et de la flèche.

Cela posé, les seules forces du système consistent en des poids, savoir : d'une part, T, C et F, qu'on peut regarder comme des forces appliquées respectivement aux cen-

tres de gravité de DC, BC et AB. De l'autre part, le poids Π agissant en E, et le poids B de la bascule; cette dernière force sera appliquée au milieu de EA, et on pourra la concevoir décomposée en deux autres, égales chacune à $\frac{1}{2}B$, et appliquées l'une en A et l'autre en E; la première sera détruite; ainsi le poids agissant en E sera $= \Pi + \frac{1}{2}B$, que nous ferons, pour simplifier, $= M$.

Nous supposerons les poids T, C et F appliqués respectivement au milieu de chacune des lignes DC, BC et AB: cette hypothèse pourra paroître peu rigoureuse, car les flèches ne sont ni cylindriques, ni prismatiques; elles ont, au contraire, la forme d'une pyramide tronquée : mais outre qu'il seroit fort aisé d'appliquer les raisonnemens ci-après au cas où le centre de gravité des flèches est placé en un point quelconque, on remarquera que dans la pratique on peut regarder le milieu de la ligne à-peu-près comme le centre de gravité, tant parce que l'extrémité B porte quelques pièces de fer, que parce que la diminution d'épaisseur de la flèche de A en B n'est pas très-considérable. Chacune de ces forces est verticale, et peut être décomposée en deux autres, savoir :

1°. La force F, en $\frac{1}{2}F$ appliquée en A et détruite, et $\frac{1}{2}F$ appliquée en B.

2°. La force T, en $\frac{1}{2}T$ appliquée en D et détruite, et $\frac{1}{2}T$ appliquée en C.

3°. La force C, en $\frac{1}{2}C$ appliquée en B, et $\frac{1}{2}C$ appliquée en C.

Ces six forces équivalent à deux puissances verticales, appliquées

L'une en B . . . . $= \frac{1}{2}(F + C) = P$.
L'autre en C . . . . $= \frac{1}{2}(T + C) = Q$.

Décomposons maintenant la force Q en deux autres, dirigées, l'une suivant le prolongement Ca de la chaîne BC, l'autre suivant DC : celle-ci sera évidemment détruite : quant à l'autre, on la trouvera en formant le parallélogramme ba; on aura (19) $\frac{\sin a}{CQ} = \frac{\sin . CQa}{aC}$,

ou $\frac{\sin(\zeta+\gamma)}{\frac{1}{2}(T+C)} = \frac{\cos\zeta}{aC}$; d'où

$$aC = \frac{\cos\zeta(T+C)}{2\sin(\zeta+\gamma)}.$$

Or, cette force aC peut être supposée appliquée en B; prenons donc $BL = aC$, et formons le parallélogramme df. La puissance aC sera décomposée en deux autres, dirigées, l'une suivant Bd, l'autre suivant BH; celle-ci sera détruite, et on aura (19)

$$\frac{\sin BdL}{BL} = \frac{\sin BLd}{Bd}, \text{ ou } \frac{\cos\alpha}{aC} = \frac{\sin(\alpha+\gamma)}{Bd};$$

donc

$$Bd = \frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\cos\alpha} \times aC.$$

La résistance et la puissance étant réduites à deux forces verticales, on exprimera (103) qu'elles sont en équilibre autour du point fixe A, à l'aide du principe des momens; or, la force appliquée en B est

$$P + Bd = \tfrac{1}{2}(F+C) + \frac{\sin(\alpha+\gamma)}{2\sin(\zeta+\gamma)} \cdot \frac{\cos\zeta}{\cos\alpha} \cdot (T+C).$$

Ainsi on a pour équilibre

$$bM = \frac{f}{2}\left\{F + C + \frac{\cos\zeta}{\cos\alpha} \cdot \frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\sin(\zeta+\gamma)}(T+C)\right\} \ldots (V^{n})$$

Cette équation fait voir que la force M doit varier avec

la position des parties du système, et qu'on doit appliquer à la bascule des forces Π variables suivant les différentes inclinaisons du tablier : or, le problême qui consiste à trouver pour une position donnée la grandeur du poids Π seroit résolu, si l'un des angles α, ζ ou γ étant donné, les autres étoient connus. Pour cela, menons les horisontales BN et CO, il est clair que le triangle ANB donne $AN = f \sin \alpha$; faisons $BC = c$, $AG = h$, $GD = a$, $DC = t$, nous aurons de même $NO = c \sin \gamma$, et $GO = t \sin \zeta$; on aura donc

$$h + f \sin \alpha = c \sin \gamma + t \sin \zeta \ldots\ldots\ldots (X'')$$

Pareillement, en opérant par rapport à GI, on aura

$$a + t \cos \zeta = f \cos \alpha + c \cos \gamma \ldots\ldots\ldots (Y'').$$

Ces deux équations serviront à completter la solution du problême.

126. Si les points A et D sont dans une même verticale, et si de plus le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme, on a $a = 0$, $t = f$ et $\alpha = \zeta$; et les trois équations précédentes deviennent

$$bM = \frac{f}{2}(F + T + 2C), \quad h = h \sin \gamma, \quad 0 = c \cos \gamma.$$

La première montre que comme la force M ne dépend pas de l'inclinaison du tablier, elle est constante pour toutes les positions qu'il peut prendre. Les deux autres font voir que γ est un angle droit, et que *la chaîne reste toujours verticale*. Le cas le plus ordinaire est celui où la figure est un parallélogramme, sans que néanmoins AD soit vertical : la première des expressions ci-dessus a encore lieu, et les équations (X'') et (Y'') deviennent $h = a \operatorname{tang} \gamma$.

Au reste, on auroit pu résoudre ces cas *à priori*, en opérant de la même manière que ci-dessus.

3°. *Des Haquets*, etc.

127. On appelle HAQUETS les longues voitures qui servent au transport du vin et des autres liqueurs. Ces voitures consistent en deux longues pièces de bois, unies par des traverses, posées sur un essieu, autour duquel elles peuvent faire la bascule, et prendre par là une position horisontale ou inclinée. A la partie antérieure est un treuil, destiné à opérer le chargement. C'est à-peu-près aussi de la même manière qu'on retire des caves les tonneaux chargés qu'elles contiennent. *AB* est une échelle; on l'adapte à la porte de la cave, en appuyant ses extrémités d'une part sur la muraille, et de l'autre sur la terre. Une corde, attachée à l'un des échelons, après avoir passé sous la tonne *H*, s'enroule autour d'un cylindre *EF*, qu'on fait tourner avec des leviers.

Fig. 84.

Supposons les deux cordons parallèles au plan incliné; nommons *P* le poids de la tonne, *r* le rayon du cylindre, ε l'angle d'inclinaison du plan *LN*; enfin, soit *M* la puissance motrice; *R* celui du cercle que décrit la puissance *M*.

1°. Le plan incliné réduit le poids *P* à $P \sin \varepsilon$ (96); 2°. comme le tonneau fait ici l'office d'une poulie mobile, le poids est réduit à moitié (109), et $= \frac{1}{2} P \sin \varepsilon$. Or, ce poids est en équilibre avec la puissance motrice, à l'aide du treuil; on a donc (110)

$$MR = \tfrac{1}{2} rP \sin \varepsilon \ldots\ldots (Z'').$$

4°. *De la Grue.*

128. La GRUE est composée d'un treuil QN. La corde qui enveloppe le cylindre, a l'une de ses extrémités fixée en I: à l'aide de poulies de renvoi c, c, d, b, elle transmet l'action de la puissance à une poulie mobile a, à la chappe de laquelle est attaché un poids P. La tension du cordon ba est (109) $= \frac{1}{2} P$. Les autres poulies d, e, c, ne font que changer la direction de la puissance, ainsi le poids que supporte le treuil QN est $\frac{1}{2} P$. Soient R et r les rayons de la roue et du cylindre, Q la puissance agissant sur la roue, on a (110), pour l'équilibre dans la grue, $QR = \frac{1}{2} Pr$. Fig. 62.

CHAPITRE IV.

DES OBSTACLES QU'ÉPROUVENT LES PUISSANCES LORSQU'ELLES AGISSENT A L'AIDE DES MACHINES.

I. *Réflexions générales sur les machines.*

129. QUAND deux forces sont en équilibre, si on augmente l'une d'elles, elle doit prévaloir sur l'autre : cette observation réduit les conditions du mouvement dans les machines à la théorie de leur équilibre. Cependant, comme les puissances éprouvent différens obstacles, nous allons traiter particulièrement de l'état où un système doit être amené pour que cet équilibre soit sur le point d'être rompu.

Il résulte de ce qu'on a vu dans le chapitre précédent, qu'on peut toujours établir l'équilibre entre deux forces quelconques, et qu'il ne faut pour cela que disposer convenablement les machines dont nous venons d'exposer les propriétés; mais en augmentant ainsi l'effet d'une puissance, on tombe dans un inconvénient inévitable. L'expérience est d'accord en ce point avec la théorie, et on peut établir comme un fait constant que, dans toutes les machines, *on perd du côté du tems ce qu'on gagne du côté de la puissance.* On peut bien faire, par exemple, qu'un seul homme élève le même poids que trente; mais il sera aussi trente fois plus de tems à l'élever d'une même hauteur. La vérité de ce principe dans le levier est évidente :

il en est de même du plan incliné, et c'est par cette raison que pour rendre une route moins rapide, on lui fait faire des circuits : on peut même rendre la pente peu sensible, en rendant les sinuosités plus nombreuses. Nous avons fait voir (109 et 114) que le principe ci-dessus est vrai dans la poulie et les roues dentées : il est aisé de voir qu'il a également lieu dans le tour et la vis.

En effet, 1°. on a vu (110) qu'on a pour l'équilibre du tour $Pp = Qq$: donc si le rayon p de la roue d'un tour est m fois plus grand que celui q du cylindre, une force P fera équilibre à une résistance Q, m fois plus grande ; c'est-à-dire, qu'on aura $P = \frac{Q}{m}$. Mais quand le mouvement a lieu, la puissance fait évidemment le tour de la roue, tandis que la corde en s'enveloppant autour du cylindre, ne fait monter le poids que d'une hauteur égale à la circonférence de ce cylindre ; et comme les circonférences sont entr'elles comme leurs rayons, il est clair que la force P fait m fois plus de chemin que la résistance Q.

2°. Quand une vis tourne dans l'écrou, pour une révolution entière, elle n'avance dans le sens de son axe que d'une longueur égale au pas : l'équation (R'') n°. 120, est dans le cas d'équilibre $P = \frac{h}{2\pi R}.Q$; en faisant $\frac{2\pi R}{h} = m$, on a $P = \frac{Q}{m}$; ainsi la puissance est m fois moindre que la résistance qui lui fait équilibre : mais pour faire parcourir la hauteur h au poids Q, la force P doit faire une longueur $2\pi R$; ainsi elle fait, dans le même tems, m fois plus de chemin.

130. Le but n'est pas toujours d'éviter l'emploi du tems, et il arrive souvent que la durée en est assez indifférente : on peut même faire servir avantageusement ce qui, dans

beaucoup de cas, seroit un obstacle, et tirer parti de l'emploi d'une force donnée de manière à lui faire parcourir un grand espace. Les organes du mouvement de presque tous les animaux offrent un exemple de la manière dont la nature s'est servi de cette propriété : les muscles ont leurs points d'attache sur les os à la partie qui est voisine des articulations, autour desquelles les os doivent tourner lorsque les muscles se raccourcissent ; il résulte de là que l'autre extrémité des membres parcourt un grand espace. Un procédé semblable peut servir à rendre un très-petit mouvement sensible.

Fig. 85. Soit, par exemple, une corde CD, ayant ses deux extrémités D et C attachées, la première à un point fixe D, la seconde à l'extrémité d'une verge AC, mobile autour d'un point B voisin de C ; on tend la corde, en disposant un poids F en un point E quelconque de la verge. Il est clair que si par quelque cause la longueur de corde CD change, quelque léger que soit le raccourcissement, il sera très-sensible à l'autre extrémité A de la verge AC ; si, par exemple, $AB = 10 \times BC$, l'arc décrit par le point A sera dix fois plus grand que l'arc décrit par le point C : on se sert de cette disposition dans les *Hygromètres ;* alors le raccourcissement de la corde CD est causé par des variations survenues dans l'atmosphère.

On a dans les *Baromètres* un autre exemple de l'usage qu'on fait de cette propriété. Nous verrons bientôt que le mercure monte et descend dans le tube qui le contient,

Fig. 86. suivant les variations du ressort de l'air ; mais ces effets sont souvent trop foibles pour être sensibles : c'est pour les amplifier que l'on dispose un cadran ainsi qu'il suit. On suspend à un fil un poids a assez léger, et on le fait entrer dans le tube par l'extrémité ouverte c : on fait passer le fil sur une poulie b ; et un autre poids f un peu moindre

que le premier, tient ce fil tendu. Comme le poids ne fait que poser sur la surface du mercure, ses variations font monter ou descendre ce poids ; la poulie *b* tourne en même-tems, et une aiguille fixée sur le même centre que la poulie marque sur la circonférence d'un cadran les différentes dispositions de l'atmosphère.

Il arrive aussi quelquefois que la grandeur de la force est presque indéfinie, et qu'on demande que ses effets soient rapides ; le choc de l'eau ou de l'air contre les ailes d'un moulin en sert d'exemple. Mais c'est nous étendre assez sur cet objet, passons maintenant aux résistances que les puissances éprouvent par l'effet des machines mêmes.

II. *Du Frottement.*

131. Lorsqu'un corps est placé sur un autre, les parties saillantes de l'un s'engagent dans les parties rentrantes de l'autre, et les surfaces les mieux polies ne sont pas exemptes de ces petites inégalités. Lorsqu'on veut que l'un des deux corps glisse sur l'autre, il faut donc dégager ces inégalités ou les rompre : la force qu'il faut employer pour vaincre cette résistance, est celle qui va nous occuper ici ; elle doit ou soutenir une partie du poids du corps en le soulevant pour ainsi dire, ou briser les parties qui sont mutuellement engagées : c'est en cela que consiste le *frottement*.

Le frottement tend donc à détruire les machines, et exige une action plus grande pour faire passer un mobile à l'état de mouvement. Il y en a deux espèces ; la première a lieu lorsqu'un corps doit glisser sur un autre ; la seconde lorsque l'une des deux surfaces juxtà-posées roule sur l'autre : ce dernier frottement est beaucoup moindre que le premier, car on voit que le mouvement de rotation contribue en partie à dégager les aspérités. C'est pour ralentir

la vîtesse d'une voiture qu'on *enraye* lorsqu'on veut descendre une montagne rapide, afin d'augmenter le frottement qui devient par là de la première espèce.

Le frottement tient à une multitude de circonstances que le calcul ne peut seul embrasser, car il faut faire entrer en considération le poli des surfaces, la température et l'humidité de l'atmosphère, l'affinité des substances, la vîtesse du mouvement, etc. Il faut donc avoir recours à l'expérience pour perfectionner ce qu'elle fera connoître, et prévoir ce qu'elle ne dira pas.

132. Voici ce que l'expérience apprend :

1°. *Le frottement varie pour des surfaces différemment polies.* Ainsi on peut le diminuer en polissant les surfaces, ou en bouchant les pores avec quelques substances qui n'augmentent pas l'adhérence, telles que les huiles, etc.

2°. *Le tems influe sur l'adhérence des corps.* On attribue cette adhérence à la flexibilité des parties qui composent les corps, qui permet à leurs surfaces de s'engager davantage.

3°. *Deux surfaces de même nature éprouvent un frottement plus grand que deux surfaces de matières différentes également polies.* C'est pour cela qu'on fait rouler les essieux, qui sont d'acier, dans les boîtes de cuivre.

4°. *Le frottement ne dépend pas de l'étendue des surfaces en contact.* Ce principe, attesté par l'expérience, paroît d'abord singulier ; cependant on peut observer que si les points de contact sont plus nombreux, chacun d'eux porte un poids moins considérable, et il paroît qu'il y a compensation entre ces deux effets. Cependant si le corps frottant étoit terminé par une pointe, comme ce corps traceroit par son poids un sillon sur la surface sur laquelle il frotte, ce cas doit être excepté de la règle.

5°. *Le frottement est proportionnel à la pression*, toutes choses égales d'ailleurs; c'est-à-dire, qu'on éprouve une résistance d'autant plus grande que le corps pèse davantage. Voici comment on doit entendre cette proposition, qui va servir de fondement à tout ce que nous aurons à dire.

133. Soit un corps M placé sur un plan horisontal AB; Fig. 87. puisque le poids est entièrement détruit, il est clair qu'abstraction faite de toute résistance, le corps doit obéir au plus léger effort : or le frottement empêche que cela ne soit ainsi. Si on fixe en D une soie passée dans la gorge d'une poulie C, le poids Q, propre à entraîner le corps M sur le plan, devra être quelquefois assez considérable : or il est visible que ce poids Q est ce qui doit mesurer le frottement. On a reconnu que si le corps M pèse 2, 3...fois plus, il faut au lieu de Q mettre un poids précisément double ou triple.... La puissance Q aura donc avec le poids M un rapport constant, en supposant que les surfaces en contact ne changent pas de nature, et c'est dans ce sens qu'on doit entendre ces expressions usitées : le frottement est le $\frac{1}{3}$, le $\frac{1}{4}$ de la pression; pour désigner que le poids Q doit être le $\frac{1}{3}$, ou le $\frac{1}{4}$ du poids M.

Supposons donc que le corps M, mis en expérience, a l'unité du poids; si on désigne par f le poids propre à vaincre le frottement, c'est-à-dire, à faire prendre au poids M un mouvement naissant, il est facile de trouver le poids Q qu'il faudroit employer pour mettre un corps dont N seroit le poids sur le point de se mouvoir; car il suffira de poser la proportion $\frac{1}{f} = \frac{N}{Q}$, d'où

$$Q = fN \quad \ldots\ldots\ldots \quad (A'''').$$

On a construit des tables propres à marquer les valeurs que prend f, pour les diverses substances les plus commu-

nes combinées deux à deux : on peut consulter le Traité de *Brisson*, etc. Nous regarderons le nombre f comme connu ; il est d'ailleurs constant. Cependant cela n'a lieu qu'entre certaines limites ; car lorsque les pressions deviennent très-considérables, le coefficient f diminue ; et au lieu d'être le $\frac{1}{3}$ ou le $\frac{1}{4}$ de la pression, il n'en est quelquefois que le $\frac{1}{12}$: cette observation indique que notre principe n'est pas rigoureusement exact.

134. On observera que le frottement étant par sa nature une force passive dont l'effet est de s'opposer à tout mouvement, on doit distinguer avec soin deux cas : ou la force qu'on considère doit produire le mouvement dans la machine ; dans ce cas le frottement lui est contraire, et la puissance doit être augmentée d'une partie convenable : ou cette force n'a pour but que d'établir l'équilibre dans le système, et alors le frottement lui est avantageux. De sorte qu'une puissance peut faire équilibre, quoiqu'elle soit moindre qu'elle ne doit l'être en vertu des principes précédens (Chap. III).

Puisque le frottement est une force dont la direction est tangente à la surface de contact, pour connoître les conditions d'équilibre, en y ayant égard, il ne faut que la considérer comme une puissance ordinaire, et la traiter à la manière des autres forces. On cherchera donc la pression normale qui a lieu au point de contact ; et la multipliant par f, on aura une nouvelle force de plus à introduire dans les calculs.

Fig. 46. 135. Appliquons d'abord ces principes au plan incliné. Employons les procédés et la notation du n°. 95 ; la pression N exercée sur le plan par les forces P' et P'' est comme on sait $N = P' \sin \phi' + P'' \sin \phi''$, ainsi on a pour la force du frottement $f(P' \sin \phi' + P'' \sin \phi'')$, force di-

rigée dans le sens de la longueur du plan, en opposition avec la puissance P'' que nous supposons être sur le point de produire le mouvement. Ainsi on aura au lieu de l'équation (C''),

$$P'' \cos \theta'' = P' \cos \theta' + f(P' \sin \theta' + P'' \sin \theta'').$$

D'où on tire pour la force cherchée

$$P'' = \frac{P' (\cos \theta' + f \sin \theta')}{\cos \theta'' - f \sin \theta''} \quad \ldots\ (B''').$$

On peut, en opérant ici comme pour les cas exposés (96), faire prendre à cette expression différentes formes. On trouve, par exemple, pour le cas de la pesanteur, où $\theta' = \frac{1}{2}\pi - \varepsilon$, Fig. 47.

$$P'' = \frac{P' (\sin \varepsilon + f \cos \varepsilon)}{\cos \theta'' - f \sin \theta''} \quad \ldots\ (C''').$$

Lorsque P'' agit dans le sens du plan, on a $\theta'' = 0$, d'où

$$P'' = P' (\sin \varepsilon + f \cos \varepsilon) \quad \ldots\ (D''').$$

Et lorsque P'' agit horisontalement, $\theta'' = \varepsilon$, et on a

$$P'' = \frac{P' (\sin \varepsilon + f \cos \varepsilon)}{\cos \varepsilon - f \sin \varepsilon} = \frac{P' (\tang \varepsilon + f)}{1 - f \tang \varepsilon} \quad \ldots\ (E''').$$

La théorie du plan incliné fournit un moyen de trouver f, plus simple que celui qu'on a indiqué numéro 133: en effet, quand un poids P est placé sur un plan incliné, faisant avec l'horison l'angle ε, il est clair que $P \sin \varepsilon$ est la composante de ce poids dans le sens du plan, et que $P \cos \varepsilon$ est sa composante perpendiculaire à ce plan : ainsi $fP \cos \varepsilon$ est le frottement; pour connoître la direction que doit avoir le plan incliné pour que le poids P soit en équilibre à l'aide du seul frottement, on voit qu'il faut que $P \sin \varepsilon = fP \cos \varepsilon$, d'où on tire Fig. 47

$$f = \tang \varepsilon = \frac{BC}{AC}.$$

Il résulte de là que si on place un corps pesant quelconque sur un plan horisontal, et qu'on incline ce plan jusqu'à ce que le corps prenne un mouvement naissant, l'angle ε formé par ce plan avec l'horison aura une tangente numériquement égale à f : c'est ce qui a fait appeler dans le cas présent « *l'angle du frottement.* » On peut calculer aisément cette tangente ; c'est-à-dire, la quantité f, puisqu'il ne faut que diviser la hauteur BC du plan par sa base AC.

Fig. 80. 136. Traitons maintenant l'équilibre du levier dans l'hypothèse du frottement. Soit HG un levier traversé par un trou circulaire dont le rayon soit $Bm = b$: concevons le levier retenu par un axe ou boulon B, dont le rayon soit sensiblement aussi $= b$; nommons M et R les deux forces qui agissent sur le levier, et considérons la première M comme destinée à prévaloir.

Il est important de remarquer que les problèmes de cette espèce peuvent toujours être résolus à l'aide des équations d'équilibre. En effet, l'axe fixe qui retient en B le levier, peut être remplacé par une force N, susceptible du même effet, et par conséquent opposée et égale en grandeur à la résultante des puissances qui agissent sur le levier, c'est-à-dire, que cette force N doit être égale à la pression exercée au point B, provenant de l'action des forces M et R. Faisons passer par le point N, pris pour origine, la droite BX parallèle à M, et prenons cette droite pour axe des x ; nommons α l'angle formé par les directions de M et de R, θ celui que forment les directions de M et N ; enfin m et r les perpendiculaires BC, BA ; nous aurons quatre forces en équilibre, savoir : 1°. la résistance R ; 2°. la force M qui lui fera équilibre, et qui sera sur le point de prévaloir sur elle ; 3°. une puissance N normale en m au boulon, (m étant

le point de contact du boulon et du levier); 4°. la force du frottement qui est $=fN$, ainsi que l'indique l'expression (A'''), et qui a sa direction tangente en m à l'axe : cette force tend à faire tourner le levier en sens contraire de M. En prenant les x positives de B vers X, et les y négatives de B vers C, on verra que les équations (V), n°. 41, qui expriment l'équilibre, deviennent ici

$$\begin{aligned} M + R\cos\alpha &= N\cos\theta + fN\sin\theta, \\ R\sin\alpha &= N\sin\theta - fN\cos\theta, \\ Mm &= Rr + bfN. \end{aligned}$$

Les signes des termes sont déterminés d'après les considérations développées n°s 26, 27 et 28, en ayant égard au sens dans lequel chaque force agit. On peut faire servir ces équations à trouver M, N et θ : en effet, la somme des quarrés des deux premières sera

$$M^2 + 2MR\cos\alpha + R^2 = N^2(1+f^2).$$

Expression qui donnera N quand M sera connue. En substituant pour N sa valeur $\frac{Mm - Rr}{bf}$ tirée de la troisième équation, et faisant, pour abréger, ... $q^2 = \frac{1+f^2}{f^2} = 1 + \frac{1}{f^2}$, on a

$$(q^2m^2 - b^2)M^2 - 2MR(b^2\cos\alpha + q^2mr) = R^2(b^2 - q^2r^2);$$

d'où on tire, en résolvant l'équation du second degré

$$M = R.\frac{mrq^2 + b^2\cos\alpha \pm b\sqrt{[q^2(m^2 + 2mr\cos\alpha + r^2) - b^2\sin^2\alpha]}}{m^2q^2 - b^2}; \quad (F''').$$

Si les forces sont parallèles $\alpha = 0$, et on a

$$M = R.\frac{mrq^2 + b^2 \pm bq(m+r)}{m^2q^2 - b^2} \ldots\ldots (C''').$$

Ces deux équations peuvent se simplifier par une con-

sidération particulière : comme on ne peut résoudre que par approximation les problèmes relatifs au frottement, on pourra supposer que b^2 est nul, puisque b est toujours fort petit par rapport à m et r : on aura donc

$$\left.\begin{array}{l} M=R\left\{\dfrac{r}{m}\pm\dfrac{b}{m^2q}\sqrt{(m^2+2mr\cos\alpha+r^2)}\right\} \\ M=R\left\{\dfrac{r}{m}\pm\dfrac{b}{m^2q}(m+r)\right\} \end{array}\right\}\ldots.(H'''').$$

Il faut prendre, dans toutes ces formules, le signe supérieur pour le cas où la force M doit être sur le point de prévaloir, et le signe inférieur dans le cas contraire.

Lorsqu'on ne fait point entrer le frottement en considération, on peut traiter la question de l'équilibre par la méthode précédente : on voit que sans parler de l'élégance de cette solution, elle a beaucoup plus de généralité que celle qui a été donnée (101), puisqu'on peut y regarder comme inconnues trois quelconques des quantités M, R, α, t, N, m et r. Il nous suffira ici de faire $f=0$, et nous aurons $q=\infty$, d'où

$$M=R\times\frac{r}{m},\quad N=\sqrt{(M^2+2MR\cos\alpha+R^2)}$$

l'expression $M=R\times\dfrac{r}{m}$ comparée aux équations (H''''), montre de combien M doit être augmentée pour être sur le point de prévaloir, ou doit être diminuée pour faire seulement équilibre, en ayant égard au frottement.

Nous avons supposé ici que l'axe ne faisoit pas corps avec le levier; mais il n'en est pas ainsi dans beaucoup de cas, tels que dans les canons, mortiers à bombes, etc. Alors cet axe est mobile dans des crapaudines fixes. Il est aisé de voir que le système est le même que ci-dessus,

excepté que le point de contact étant à l'opposite en n, la force fN, qui provient du frottement, doit être appliquée en ce point, et dirigée en sens contraire. Ces considérations font voir que le problême est ici le même que ci-dessus, excepté que f doit y être mis avec un signe contraire. Or, comme les résultats que nous venons d'obtenir ne renferment que f^2 ils ont encore lieu pour ce cas.

137. Le problême de la poulie avec ou sans frottement pourroit être résolu de la même manière ; mais il est plus simple de faire les deux bras de levier égaux, ou $m=r$, cette considération change les équations F''', G''', H''', respectivement en

$$M=R.\frac{m^2q^2+b^2\cos\alpha\pm b\sqrt{[2m^2q^2(1+\cos\alpha)-b^2\sin^2\alpha]}}{m^2q^2-b^2}$$

$$M=R\,\frac{m^2q^2+b^2\pm 2mbq}{m^2q^2-b^2}.$$

$$M=R\left(1\pm\frac{2b}{mq}\times\cos\tfrac{1}{2}\alpha\right),\ M=R\left(1\pm\frac{2b}{mq}\right).$$

138. On pourroit résoudre le problême du frottement dans le treuil de la même manière ; mais ici les forces étant disposées dans l'espace, il faudroit appliquer les six équations (T) et (U), n°s 39 et 40. L'élimination seroit alors fort laborieuse ; et on auroit pour résultat une équation du quatrième degré si compliquée, qu'elle ne pourroit être d'aucune utilité. Au reste, on peut appliquer ici, d'une manière assez exacte, ce qui vient d'être dit sur le levier, puisque si on projette tout le système sur un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, on n'a plus à considérer que des forces dans un même plan, appliquées à un levier. Nous ne nous arrêterons pas plus longtems sur cet objet.

139. Traitons maintenant le frottement dans la vis ;

poids P, qui est supposé prévaloir. Ainsi *pour faire entrer en considération la roideur de la corde employée dans une machine, il ne faut qu'augmenter le bras de levier de la résistance d'une quantité convenable.*

Il reste maintenant à connoître cette quantité $CD = q$: pour cela, observons qu'une corde résiste par deux causes aux efforts qu'on fait pour la ployer. La première est due à la tension de la corde et lui est proportionnelle, elle sera donc $= bQ$; la seconde est produite par son ourdissage, et on peut représenter par a la force nécessaire pour la vaincre. a et b sont ici, comme on voit, des coefficiens indéterminés. Ainsi pour une même corde $a + bQ$ pourra représenter la force nécessaire pour ployer. Mais si on change de corde, le diamètre D sera différent, et on pourra dire que, toutes choses égales d'ailleurs, la force qu'on doit employer est proportionnelle à une certaine puissance n de D; car la force nécessaire pour ployer une corde croît avec son diamètre : cette puissance décroît, au contraire, avec le rayon r de la poulie; $\frac{D^n}{r}(a+bQ)$ pourra donc représenter la force nécessaire pour vaincre la roideur de la corde : n est encore une quantité indéterminée. Cette valeur est l'accroissement qu'on doit donner à la force P pour qu'elle soit sur le point de prévaloir; or on a d'ailleurs $Pr = Q(r+q)$: et comme dans le cas d'équilibre $P - Q = 0$, $P - Q$ ou $Q \times \frac{q}{r}$ est aussi la valeur de cet accroissement; en égalant on a

$$D^n(a+bQ) = Qq, \text{ d'où } q = \frac{D^n}{Q}(a+bQ) \ldots . (K''').$$

141. Cette équation n'est, il est vrai, fournie que par des considérations générales, et n'est pas rigoureusement

démontrée; elle renferme d'ailleurs des coefficiens inconnus, n, a, b, variables d'une corde à une autre. Mais il est un moyen de trouver ces coefficiens, et de s'assurer que cette expression est exacte dans la pratique.

On choisira une corde, et la ployant sur la gorge d'une poulie, on lui fera porter deux poids; on augmentera l'un d'eux convenablement, on verra de combien il doit excéder l'autre, pour être sur le point de prévaloir : faisant la même expérience quatre fois, en changeant de poids ou de poulie, on aura aussi quatre valeurs de $P - Q$, c'est-à-dire, de $\frac{D^n}{r}(a + bQ)$, ce qui fournira quatre équations. Soient d, f, g, h ces valeurs, on aura donc en désignant par r, r', r'' et r''' les divers rayons des poulies, et par Q, Q', Q'' et Q''' les poids employés tour-à-tour,

$$d = \frac{D^n}{r}(a + bQ),\ f = \frac{D^n}{r'}(a + bQ'),$$

$$g = \frac{D^n}{r''}(a + bQ''),\ h = \frac{D^n}{r'''}(a + bQ''').$$

Les trois premières serviront à faire connoître les valeurs de n, a et b; et la dernière servira à s'assurer si la formule (K''') a l'exactitude qu'on desire.

Le cit. *Coulomb*, à qui on doit cette ingénieuse théorie, a trouvé que la quantité n étoit ordinairement 1,7 ou 1,8, et que par conséquent la résistance étoit à-peu-près proportionnelle au quarré du diamètre de la corde; mais elle varie d'ailleurs, et devient même 1,4 lorsque la corde est très-usée. Voici les résultats auxquels il est parvenu, exprimés en poids anciens :

Corde blanche.	de 30 fils de carret	$\frac{D^n}{r} \times a$ = liv. 4,2..	$\frac{D^n}{r} b \times 100$ = liv. 9
	de 15 fils.....	=1,2..	=5,1
	de 6 fils.....	=0,2..	=2,2
Corde goudronnée.	de 30 fils de carret	=6,6..	=11,6
	de 15 fils.....	=2,0..	=5,6
	de 6 fils.....	=0,4..	=2,4

IV. *Frottement d'une corde qui s'enroule autour d'un cylindre.*

Fig. 90. 142. Soit BAN le profil d'un cylindre, dont le rayon $LC = r$: AR une des extrémités de la corde, à laquelle est appliquée la résistance R : la puissance P, qui tend à vaincre cette résistance, est supposée agir à l'autre extrémité de la corde, qui est enroulée autour du cylindre, sur un arc quelconque AGN; cette puissance étant sur le point de prévaloir, fait par conséquent équilibre à la résistance R et à la force provenant du frottement exercé sur l'arc embrassé par la corde. La tension t en un point quelconque L de cet arc est aussi dans le même cas; elle consiste en une force tangente en L, qui doit être égale (par la nature de la poulie fixe qui ne sert qu'à changer les directions des forces (105)) à la résistance R, plus au frottement qui s'exerce depuis ce point L jusqu'en A. Soit $AL = s$, et prenons un arc infiniment petit $LB = ds$, partagé en deux parties égales au point G; menons les rayons CB, CG, CL, et nommons p la somme des pressions normales qui s'exercent sur tous les élémens de l'arc AL : la pression normale qui s'exerce sur LB sera $= dp$.

Cela posé, la tension de chacun des demi-élémens GB,

GL étant désignée par t, la pression dp qui en résulte, c'est-à-dire, la résultante de ces tensions, prise dans la direction GC, est (17) visiblement $= 2t \cos CGB$; mais en considérant le triangle CGB comme rectangle en B, on a dans ce triangle, $\cos CGB = \frac{GB}{GC} = \frac{ds}{2r}$; donc $dp = \frac{t\,ds}{r}$. Mais d'après ce qu'on a dit ci-dessus, f désignant le frottement, on a (133) $t = R + fp$, d'où on tire $fdp = dt$; mettant pour dp sa valeur, on en conclut $\frac{dt}{t} = \frac{fds}{r}$, dont l'intégrale est $\log t = \frac{f}{r} s + \log. C$. Comme $s = 0$ donne $t = R$, on a $C = R$, donc $\log \frac{t}{R} = \frac{fs}{r}$; et en désignant par e le nombre dont le logarithme népérien est 1, on en conclut

$$t = Re^{\frac{fs}{r}} \ldots\ldots\ldots (L'').$$

C'est l'expression de la tension qu'éprouve le point L. Si on veut avoir la grandeur de la puissance P, qui fait équilibre, et est sur le point de prévaloir, il faut faire $s = AGN$, et $t = P$. S'il arrivoit que AGN, ou la longueur de la corde qui embrasse le cylindre, fût égale à n fois la circonférence entière, c'est-à-dire que la corde fit plusieurs tours sur ce cylindre, on feroit $s = 2\pi rn$; ainsi on a dans ce cas

$$P = Re^{2\pi fn} \ldots\ldots\ldots (M'').$$

Si on fait croître le nombre n en progression par différence, la valeur P croît en progression par quotient; et plus le nombre de tours de la corde autour du cylindre est considérable, plus la force P doit être grande. La ra-

pidité avec laquelle croît la grandeur de P, sert à expliquer la cause qui permet à une puissance R, très-foible, de faire équilibre à une puissance P très-considérable.

Fin de la Statique.

LIVRE II.

DYNAMIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

Du mouvement d'un point en ligne droite.

143. La Dynamique *est la partie de la Mécanique qui, faisant entrer le* tems *en considération, a pour objet l'action des forces sur les corps solides, lorsqu'il résulte de cette action un mouvement.* Fidèles à la marche que nous avons suivie dans la Statique, et que nous avons développée dans la préface, nous ne traiterons dans ce chapitre que du *mouvement rectiligne d'un point*, afin de ne pas combiner à-la-fois tous les élémens qu'embrasse en général la Dynamique : nous passerons dans les chapitres suivans à des considérations plus étendues.

I. *Du Mouvement Uniforme.*

144. Le mouvement d'un point matériel est uniforme lorsqu'il parcourt *des espaces égaux dans des tems égaux*, quels que soient d'ailleurs ces tems. Ce mouvement, le plus simple de tous et le plus facile à concevoir, nous conduira à l'analyse des autres mouvemens.

Lorsqu'un corps se meut uniformément, il parcourt dans chaque unité de tems le même espace : désignons cet espace par V. L'espace que parcourra un mobile pendant un nombre t d'unités de tems sera donc Vt, et il est visi-

ble que cela aura lieu quel que soit t, (entier ou fractionnaire) : de sorte que *dans le mouvement uniforme les espaces parcourus sont proportionnels aux tems employés à les parcourir.* Si donc la droite AE est celle que le mobile décrit, B étant son point de départ, ou plutôt sa position à l'instant où on compte $t = 0$: N étant le lieu du mobile au bout du tems t, on a $BN = Vt$. Soit un point fixe A auquel on rapporte les positions successives du mobile ; en désignant par e sa distance AN à ce point au bout du tems t, et par E l'espace initial AB, il est clair qu'on a

Fig. 91.

$$e = E + Vt \ldots\ldots (a)$$

pour l'équation générale des mouvemens uniformes. Ces mouvemens diffèrent d'ailleurs entr'eux par les valeurs des constantes E et V.

On a donné à la constante V le nom de VITESSE ; c'est, comme on a vu, *l'espace parcouru pendant une unité de tems.* On a aussi une autre expression de la vitesse, car Vt ou l'espace BN décrit durant le tems, est égal à $e - E$; or on a $V = \frac{e - E}{t} = \frac{BN}{t}$: ainsi *la vitesse est le rapport constant qui existe entre un espace quelconque et le tems employé à le décrire.* On ne doit pas oublier qu'on ne doit entendre ici par e et t que des nombres abstraits, qui sont des nombres d'unités d'espace et de tems : ainsi on ne compare pas entr'elles des choses hétérogènes, comme l'énoncé précédent et l'équation (a) semblent l'indiquer.

145. Après avoir trouvé l'équation du mouvement uniforme, la question qui se présente d'abord est de déterminer quelle est la puissance qui par son action sur un mobile est capable de lui imprimer un pareil mouvement. Pour résoudre ce problème il suffit de se rappeler la loi

D'INERTIE qui consiste dans le principe suivant : tous les corps, *soit en repos, soit en mouvement, doivent être considérés comme persévérant dans l'état où ils sont.*

Nous avons déja dit qu'un point en repos doit y rester si aucune force n'agit sur lui : mais s'il est sollicité par une force quelconque, et ensuite abandonné à lui-même, il est d'abord clair que son mouvement sera rectiligne, puisqu'il n'y a aucune raison pour qu'il s'écarte plutôt à droite qu'à gauche de sa direction primitive. De plus il se meut uniformément, et cette circonstance n'est pas également évidente. « La nature de la force motrice étant inconnue, il « est impossible de savoir *à priori* si cette force doit se « conserver sans cesse. A la vérité, un corps étant incapable de se donner aucun mouvement, il paroît également incapable d'altérer celui qu'il a reçu ; de sorte que « la loi d'inertie est au moins la plus naturelle et la plus « simple que l'on puisse imaginer. Elle est d'ailleurs confirmée par l'expérience : en effet nous observons sur la « terre que les mouvemens se perpétuent plus longtems, à « mesure que les obstacles qui s'y opposent viennent à diminuer, ce qui nous porte à croire que, sans ces obstacles, ils dureroient toujours. Mais l'inertie de la matière est principalement remarquable dans les mouvemens « célestes qui, depuis un grand nombre de siècles, n'ont « point éprouvé d'altération sensible. Ainsi nous regarderons l'inertie comme une loi de la nature ; et lorsque « nous observerons de l'altération dans le mouvement d'un « corps, nous supposerons qu'elle est due à l'action d'une « cause étrangère. » (*Expos. du syst. du monde*, p. 138) (*). Ainsi lorsqu'une force agissant sur un corps lui imprimera une impulsion, le mouvement de ce corps sera uniforme.

(*) Voyez aussi les Mélanges de Turin, t. 2, p. 308.

146. Cherchons dans la nature du mouvement uniforme, une quantité propre à mesurer l'intensité de la force impulsive, à laquelle il est dû : pour cela observons que les forces ne peuvent nous être connues que par les effets qu'elles produisent, c'est-à-dire, par les espaces qu'elles font décrire dans des tems déterminés : il est donc naturel de prendre pour leur mesure la vîtesse qu'elles engendrent, ou l'espace qu'elles font décrire dans chaque unité de tems; mais cela suppose que *les forces sont proportionnelles aux vîtesses qu'elles impriment.* Ce principe revient visiblement à supposer que plusieurs forces agissant dans le même sens feront parcourir, durant une unité de tems, un espace égal à la somme des espaces que chacune d'elles eût fait parcourir séparément : or c'est ce que nous ne pouvons pas savoir *à priori*, vu notre ignorance sur la nature des forces. Il faut donc ici recourir à l'expérience, car tout ce qui n'est pas une suite nécessaire du peu de données que nous avons sur la nature des choses, n'est pour nous qu'un résultat de l'observation. Comme cet objet sort des bornes d'un Traité élémentaire, nous n'entrerons à cet égard dans aucun détail : on consultera sur ce sujet la *Mécanique céleste*, n°s. 5 et 24, où LAPLACE a traité cette théorie avec une profondeur et une élégance qui lui sont particulières. On conclut de là que

1°. *Une force agissant par impulsion sur un mobile, lui imprime un mouvement uniforme et rectiligne, et la vîtesse qui a lieu dans ce mouvement mesure l'intensité de la force*; ainsi la vîtesse V est ce qui caractérise en particulier chaque espèce de force, chaque espèce de mouvement uniforme.

2°. Lorsqu'une force agit sur un corps déja en mouvement, elle produit sur lui le même effet que s'il étoit

en repos, c'est-à-dire, que la vîtesse qui auroit lieu dans ce dernier cas s'ajoute à celle que le corps avoit : car on peut à chaque instant regarder le corps comme en repos, et supposer que la force motrice qui l'avoit animé le sollicite dans cet état.

3°. La vîtesse étant proportionnelle à la force, ces deux quantités peuvent être représentées l'une par l'autre, et tout ce que nous avons établi précédemment (17, 18) sur la composition des forces, doit être dit de la composition des vîtesses. Lorsque deux forces P et Q agissent simultanément sur le mobile A dans les directions AP et AQ, en prenant ces longueurs égales aux vîtesses respectives que les impulsions tendent à communiquer, le corps A doit se mouvoir uniformément suivant la diagonale AR du parallélogramme $APRQ$, et cette diagonale sera la vîtesse qui aura lieu. De même, si trois forces P, Q et S dans des plans différens tendent à imprimer des vîtesses AB, AD et AC, le mouvement du point A sera uniforme suivant la diagonale AI du parallélipipède $ALMH$; et cette diagonale sera la vîtesse.

Fig. 10 et 11.

Fig. 13.

4°. Si les directions de deux forces P et Q sont rectangulaires, on peut les supposer destinées à éloigner le mobile A, durant l'unité de tems, de quantités AP et AQ des directions respectives AQ et AP. Or, puisque ces deux forces, par leur action simultanée, transportent le point A en R, et qu'on a $RP = AQ$, et $RQ = AP$, on voit que l'effet que chaque force tendoit à produire isolément a encore lieu. De même, si le parallélipipède $ALMH$ est rectangle, en considérant la force Q comme destinée à éloigner le point A du plan BAC de la quantité AD, durant l'unité du tems : à cause de $AD = HI$, cet effet est produit. Donc en général *quand des forces*

Fig. 10.

Fig. 13.

de directions rectangulaires agissent sur un point matériel, l'effet qu'elles produisent est le même que celui que chacune auroit produit séparément, en n'oubliant pas quel sens on doit attacher au mot *effet*. C'est en cela que consiste l'indépendance entre les forces rectangulaires.

147. Considérons les mouvemens de plusieurs mobiles mus uniformément : on aura pour chacun d'eux des équations de la forme $e = E + Vt$, qu'il faudra combiner entr'elles convenablement. En voici quelques exemples :

I. Si les deux mobiles partent d'un même point, pris pour origine des espaces, les équations de leurs mouvemens seront $e = Vt$, $e' = V't'$: on conclut de là que, *en tems égaux, les vîtesses sont proportionnelles aux espaces parcourus;* car $t = t'$ donne $\frac{e}{e'} = \frac{V}{V'}$. *Si les vîtesses sont égales, les espaces parcourus sont proportionnels aux tems;* car $V = V'$ donne $\frac{e}{e'} = \frac{t}{t'}$: *et si les espaces sont égaux, les vîtesses sont réciproques aux tems;* car $e = e'$ donne $Vt = V't'$.

II. Soient V et V' les vîtesses de deux mobiles, distans entr'eux de E' lorsque $t = 0$; il est aisé de trouver leur point de rencontre; car en prenant le point de départ du premier pour origine, les équations de leurs mouvemens sont $e = Vt$, $e' = E' + V't'$; au point de rencontre, on a à-la-fois $e = e'$, et $t = t'$: donc en éliminant, on a

$$t = t' = \frac{E'}{V - V'}, \quad e = e' = \frac{VE'}{V - V'} \ldots\ldots (b).$$

III. Cherchons au bout de quel tems ces deux mobiles seront distans l'un de l'autre de K. Il est clair qu'il faut pour cela qu'on ait $e - e' = K$, ou $e' - e = K$; ainsi le problême a deux solutions, l'une avant, l'autre après

le point de rencontre. Faisons donc $e - e' = \pm K$, pour les cumuler toutes deux; et de plus $t = t'$; nous aurons

$$t = t' = \frac{E' \pm K}{V - V'}, \quad e = V \times \frac{E' \pm K}{V - V'}, \quad e' = \frac{VE' \pm V'K}{V - V'};$$

en faisant $K = 0$, on retrouve les équations (b).

IV. Le mouvement d'un mobile est déterminé lorsqu'on connoit les valeurs des deux constantes E et V qui entrent dans son équation, ou, ce qui revient au même, lorsqu'on donne des conditions auxquelles elles doivent satisfaire. Si, par exemple, dans le problême précédent, au lieu de donner E', on disoit seulement que le second mobile étoit éloigné de l'origine, au bout du tems τ, de la quantité ϵ, l'équation $e = E' + V't$ deviendroit, en mettant ces valeurs pour t et e, $\epsilon = E' + V'\tau$; d'où on tire $E' = \epsilon - V'\tau$. Si on veut obtenir une solution plus générale des problêmes précédens, on substituera $\epsilon - V'\tau$ à E', dans les équations auxquelles nous avons été conduits.

V. Soient deux mobiles assujettis à décrire uniformément la même courbe. Pour trouver le point de rencontre, il est clair qu'il suffit de concevoir la courbe rectifiée, et de recourir aux équations (b). Mais si la courbe est fermée, les mobiles, en continuant de se mouvoir, se rencontreront de nouveau : le lieu de la première rencontre est alors pris pour point de départ, et pour y appliquer les mêmes formules, il suffit de regarder alors les deux mobiles comme distans du périmètre entier p de la courbe. L'instant de la seconde rencontre seroit donné par l'équation (b) qui devient $t = \frac{p}{V - V'}$, et on auroit pour le tems T écoulé depuis l'origine du mouvement $T = \frac{E'}{V - V'} + \frac{p}{V - V'}$, ou $T = \frac{E' + p}{V - V'}$. En conti-

nuant ce raisonnement, on aura la troisième rencontre; etc.. en général la n^{eme}. rencontre aura lieu au bout du tems

$$t = \frac{E' + (n-1)p}{V - V'},$$

et les espaces parcourus par chaque mobile depuis le point de départ du premier mobile jusqu'au lieu de la n^{eme}. rencontre, seront

$$e = V \times \frac{E' + (n-1)p}{V - V'}, \quad e' = \frac{VE' + V'p(n-1)}{V - V'}.$$

Concevons un troisième mobile qui décrit la même courbe, on aura de même pour sa n'^{eme}. rencontre avec le premier mobile $t = \frac{E'' + (n'-1)p}{V - V''}$; ainsi les trois mobiles se rencontreront à-la-fois lorsque cette valeur de t sera égale à la précédente, ce qui donne

$$\frac{E' + (n-1)p}{V - V'} = \frac{E'' + (n'-1)p}{V - V''},$$

$$\text{ou } \frac{\frac{1}{p} \times E' + n - 1}{\frac{1}{p} \times E'' + n' - 1} = \frac{V - V'}{V - V''}.$$

Il faudra maintenant trouver des valeurs entières pour n et n' qui satisfassent à cette équation. Ce problême est indéterminé, et sa solution rentre dans la théorie connue en algèbre (voyez le Compl. d'alg. de *Lacroix*, 129). On pourroit prendre un plus grand nombre de mobiles.

A l'aide de ces formules, on détermine l'instant où les aiguilles d'une montre qui marque les heures, les minutes et les secondes se doivent rencontrer deux à deux, ou toutes les trois ensemble, puisqu'on peut regarder les extrémités des aiguilles comme des points qui parcourent la même circonférence.

II. *Du Mouvement Varié en général.*

148. *Tout mouvement qui n'est pas uniforme est appelé* VARIÉ; et on dit que ce mouvement est *Accéléré* ou *Retardé* suivant que les espaces parcourus dans des tems égaux successifs, sont de plus en plus grands, ou de plus en plus petits.

Pour avoir une idée nette du mouvement varié d'un mobile, il faut le concevoir continuellement soumis à l'action d'une force, de sorte qu'il reçoive à chaque instant une nouvelle impulsion; sans ces actions réitérées, le mouvement seroit uniforme, et on voit que la force agissant sans interruption sur le mobile, on peut supposer, sans qu'il en résulte d'erreur sensible, que ces impulsions sont séparées entr'elles par des tems dont la durée est infiniment petite. On peut même supposer ces intervalles de tems égaux entr'eux et à l'élément du tems dt. Nous avons dans la pesanteur, les attractions, ... des exemples de forces continues.

149. Si on suppose qu'au bout d'un tems quelconque t, la force cesse tout-à-coup d'agir, le mouvement du point devient sur-le-champ uniforme, et sa vîtesse, dans ce mouvement, est produite par les impulsions exercées durant le tems qui a précédé; cette vîtesse, ou l'espace que le corps parcourt dans chaque unité de tems, est ce qu'on appelle la vîtesse du corps au bout du tems t. Ainsi *dans un mouvement varié, la vîtesse d'un mobile à un instant déterminé, est l'espace qu'il décriroît durant chaque unité de tems, si tout-à-coup à cet instant la puissance cessoit d'agir.* Soit v cette vîtesse; il est clair, d'après ce qui a été dit ci-dessus, que durant le tems dt, le mouvement est uniforme: soit e l'espace décrit pendant le tems t,

ou la distance du corps à l'origine après ce tems, de sera l'espace décrit pendant l'élément de tems dt; on a donc (144) pour la vîtesse

$$v = \frac{de}{dt} \ldots\ldots\ldots (c).$$

Ainsi *dans tout mouvement varié, la vîtesse est le coefficient différentiel du premier ordre de l'espace, ou, l'élément de l'espace divisé par l'élément du tems.* Si donc on désigne par $e = ft$, l'équation qui exprime la relation entre les espaces e et les tems t dans le mouvement qu'on considère, on obtiendra aisément, en fonction du tems t et par une simple différentiation, la vîtesse $v = f't$. Et réciproquement si on a l'équation $v = f't$, il ne faudra qu'une simple intégration de l'équation $de = dt.f't$, pour obtenir l'équation du mouvement $e = ft$.

150. Comme l'effet d'une force continue sur un mobile est de lui communiquer par ses actions successives une vîtesse finie, au bout d'un tems infini, et comme le nombre de ses impulsions est fini, chacune d'elles doit être infiniment petite. Ainsi on ne peut établir de comparaison entre une force d'impulsion et une force continue, puisque l'effet instantané de la première est fini, tandis que celui de l'autre est infiniment petit. C'est ce que nous aurons occasion de mieux développer par la suite (222, 234).

151. Il arrive souvent que l'intensité de la puissance varie à chaque instant, alors le mouvement éprouve des variations qui dépendent de celles que subit la force. Cherchons la relation qui existe, en général, entre la vîtesse et la *force accélératrice*, (c'est ainsi qu'on nomme la puissance dont l'action continue fait varier le mouvement). Soient F et f deux forces qui par leurs impulsions seroient capables de donner les vîtesses V et v; concevons le tems τ

partagé en un nombre quelconque n d'intervalles égaux, et supposons que les forces F et f agissent continuellement, et communiquent leurs impulsions V et v, à la fin de chacun de ces intervalles. Il est clair que les vîtesses engendrées seront successivement $V, v; 2V, 2v; 3V, 3v; \ldots$ ainsi au bout du tems t, nV et nv seront les vîtesses engendrées par l'action continue des puissances. Mais on a (146), $\frac{F}{f} = \frac{V}{v}$; ou $\frac{F}{f} = \frac{nV}{nv}$; donc les forces accélératrices constantes sont proportionnelles aux vîtesses qu'elles engendrent pendant des tems égaux, puisqu'ici le tems qui sépare les actions successives est aussi petit qu'on veut.

152. Comme pour mesurer les puissances, il faut trouver dans le mouvement qu'elles engendrent une quantité qui leur soit proportionnelle, il suit de ce qu'on vient de dire que pour mesurer l'intensité de la force accélératrice φ au bout du tems t, il faut supposer qu'elle devient tout-à-coup constante pendant l'unité de tems, et prendre la vîtesse qu'elle engendreroit dans cet état.

Cela posé, il est clair que pendant l'instant dt qui suit le tems t, la force φ communiquera la vîtesse dv; mais si cette force devient tout-à-coup constante, elle continuera d'imprimer à la fin de chaque élément de tems la même vîtesse; donc la vîtesse qui sera produite pendant l'unité de tems sera l'élément dv, pris autant de fois que la force a donné d'impulsions, c'est-à-dire, autant de fois que l'unité de tems contient l'élément dt; le produit de dv par $\frac{1}{dt}$, sera donc la vîtesse qu'aura engendré pendant l'unité de tems la force φ devenue constante. On a donc

$$\varphi = \frac{dv}{dt} \ldots\ldots\ldots (d).$$

Ainsi dans tout mouvement varié *la force accélératrice est le coefficient différentiel du premier ordre de la vitesse*, ou *l'élément de la vitesse divisé par l'élément du tems*. Mais on ne doit point oublier que φ n'est point ici la valeur absolue de la force, mais seulement une quantité qui lui est proportionnelle, et lui sert de mesure; et comme en mécanique on n'a besoin que du rapport des forces entr'elles, ou avec l'une d'elles prise pour unité, cette quantité φ suffit à nos besoins.

On peut remarquer qu'en multipliant entr'elles *les deux équations du mouvement*

$$dc = v\,dt, \quad \varphi\,dt = dv$$

on obtient $$\varphi\,dc = v\,dv \ldots\ldots (e);$$

ce qui fournit une nouvelle relation entre les variables, qui remplace souvent avec avantage l'une des équations du mouvement, en se prêtant plus commodément au calcul.

153. On fait un très-fréquent usage des équations précédentes. Si on connoît l'équation $c = fi$ du mouvement, une première différentiation ayant déja fait connoître la vîtesse en fonction du tems, $v = f't$, une seconde différentiation fera connoître la force accélératrice $\varphi = f''t$. Mais le problème inverse se présente beaucoup plus souvent : c'est la force que la nature de la question fait connoître en fonction du tems, et il s'agit alors d'en déduire, par des intégrations, la vîtesse, et l'équation $c = fi$ du mouvement. Pour bien saisir la marche qu'on doit suivre dans ce cas, observons que la nature de la question fournit toujours une relation particulière entre la force φ, la vîtesse v et l'espace c, qui correspondent au tems t; ou seulement entre deux ou trois de ces quantités qui sont les seules variables que cette question comporte : cette relation, exprimée par une équation, la caractérise et lui est essentiellement

propre. On joint cette équation à celles $de = vdt$, $dv = \varphi dt$; et à l'aide du calcul intégral, en éliminant entre ces trois équations, on en obtient des relations entre deux quelconques des quatre variables φ, v, e et t. Ces relations renferment alors des constantes arbitraires qu'il est facile de déterminer d'après la connoissance de la vîtesse du corps et de sa position à un instant donné. Des applications rendront cette exposition plus lucide. (Voyez article IV).

III. *Du mouvement Uniformément Varié.*

154. La continuité de l'action d'une puissance sur un mobile nous a conduits à la notion du mouvement varié : mais il peut arriver que cette puissance soit constante, c'est-à-dire, que conservant sans cesse la même intensité, elle imprime à chaque instant des degrés égaux de vîtesse : le mouvement qui a lieu dans ce cas a été appelé UNIFORMÉMENT VARIÉ : donc *le mouvement uniformément varié est celui qu'engendre une force continue et constante.*

La définition même du mouvement donne $\varphi =$ constante : désignons cette constante par g; c'est la vîtesse qu'engendrera durant chaque unité de tems la force accélératrice. On a donc $dv = gdt$; intégrons et désignons par V la vîtesse que le mobile avoit au commencement du tems t, nous aurons

$$v = V + gt.$$

Comme gt est la vîtesse acquise au bout du tems t, on voit que *la vîtesse croît proportionnellement au tems.* On a (149, c), $v = \frac{de}{dt}$, donc $de = Vdt + gt\,dt$, et en intégrant

$$e = E + Vt + \tfrac{1}{2}gt^2 \ldots\ldots\ldots (f).$$

Telle est l'équation générale du mouvement uniformément varié.

Fig. 91. Si on fait $t = o$, on trouve $e = E$: ainsi soient AE la ligne que décrit le mobile, A l'origine des espaces e, B le lieu du mobile lorsque $t = o$, on a $AB = E$; c'est l'*espace initial*. V est d'ailleurs la vîtesse initiale, c'est-à-dire celle que le corps avoit en B, soit en vertu d'une impulsion particulière, soit par l'effet de la puissance pendant les instans antérieurs à son arrivée en ce point. Enfin g *est la vîtesse acquise au bout de chaque unité de tems.*

Si on prend pour origine des espaces le point de départ du mobile, ou plutôt le lieu où il se trouve lorsqu'on compte $t = o$, on a $E = o$: si de plus le mobile n'a aucune vîtesse à cet instant, $V = o$; et le mouvement uniformément varié a pour ses équations

$$v = gt, \quad e = \tfrac{1}{2}gt^2 \ldots\ldots\ldots (g).$$

Cette équation ne renferme que les circonstances de mouvement dues à la force continue : de sorte qu'on voit que le coefficient g, ou la force accélératrice, est le double de l'espace que cette force fait parcourir au corps durant la première unité de tems.

Au bout du tems t, si tout-à-coup la force cesse d'agir, le mouvement devient uniforme, et l'espace que le mobile décrira, en vertu de la vîtesse acquise, sera gt pendant chaque unité de tems, et (144), $gt \times t = gt^2$ durant un tems t égal au premier. Or cet espace est double de $\frac{1}{2}gt^2$, que le mobile a décrit pendant le premier tems t : donc l'*espace décrit d'un mouvement uniformément varié, durant un certain tems, est la moitié de celui qui seroit parcouru dans le même tems, d'un mouvement uniforme, dont la vîtesse seroit égale à celle qu'a communiquée la force continue.*

155. Voici quelques conséquences de ce qui précède.

1°. Les équations (*g*) donnent la vîtesse, et l'espace parcouru en fonction du tems ; en éliminant t entr'elles, on obtient les équations

$$v^2 = 2ge, \quad \text{ou } e = \frac{v^2}{2g},$$

qui font connoître la vîtesse en fonction de l'espace, et réciproquement. On auroit obtenu directement ces équations en intégrant la formule (*e*) qui devient ici $gde = vdv$.

2°. Si on avoit à comparer entr'eux les mouvemens de plusieurs mobiles, il faudroit combiner ensemble des équations de la forme $e = E + Vt + \frac{1}{2}gt^2$, ainsi qu'on l'a fait précédemment (147) ; mais ici les calculs seroient beaucoup plus compliqués. Nous nous bornerons à traiter le cas où deux mobiles sont soumis aux actions d'une même force, et où on fait abstraction des circonstances étrangères à cette force. Alors on a les équations suivantes, pour

le 1er mobile.... $e = \frac{1}{2}gt^2$, $v = gt$, $v^2 = 2ge$,
le 2e mobile.... $e' = \frac{1}{2}gt'^2$, $v' = gt'$, $v'^2 = 2ge'$.

1°. *Les espaces parcourus sont entr'eux comme les quarrés des tems*, puisqu'on a $\frac{e}{e'} = \frac{t^2}{t'^2}$.

2°. *Les vîtesses sont comme les tems*, car on a $\frac{v}{v'} = \frac{t}{t'}$.

3°. Enfin *les espaces sont comme les quarrés des vîtesses*, puisqu'on a $\frac{e}{e'} = \frac{v^2}{v'^2}$.

156. Le mouvement des corps pesans est celui qui, par sa nature et ses nombreuses applications, mérite le plus notre attention. La pesanteur, cette force dont l'action s'exerce continuellement sur tous les corps, leur communique sans cesse de nouveaux degrés de vîtesse. Nous sup-

poserons ici que cette force est constante, et que, par conséquent, le mouvement qu'elle imprime est uniformément varié. Cette hypothèse n'est point démontrée, il est vrai; et même nous verrons bientôt (161) que la force d'attraction qui réside au centre de la terre, a une intensité qui varie avec les distances des corps à ce centre : mais cela n'en est pas moins légitime, car on peut remarquer que les espaces les plus grands que parcourent, en vertu de la gravité, les corps qui sont à la surface de notre globe, sont fort petits par rapport à son rayon; et à cause du peu d'étendue de la hauteur dont les corps peuvent descendre en vertu de gravité, le mouvement varié qu'elle leur imprime est très-peu différent du mouvement uniformément varié que nous lui substituons. Cette hypothèse est également admissible dans tous les cas où les forces variables n'agissent que pendant un tems de fort courte durée. Il suffit pour s'en convaincre de remarquer que la force φ exprimée en fonction de e est en général de la forme $\varphi = A + Be + Ce^2 + \text{etc.}$: en introduisant cette valeur dans l'équation (e), elle devient

$$vdv = Ade + Bede + \text{etc.}, \text{ d'où } v^2 = \text{Const.} + 2Ae + Be^2 + \text{etc.}$$

Or il est clair que la valeur de ce développement approche d'autant plus d'être $= \text{Const.} + 2Ae = H(e + F)$, ($H$ et F étant des constantes) que e est plus petit. Ainsi on peut supposer $v^2 = H(e + F)$ dans le cas dont il s'agit, ce qui démontre la proposition.

L'expérience a fait connoître, ainsi que nous le verrons (195, 4°.), la valeur très-approchée du coefficient g qui mesure la force accélératrice de la pesanteur : ce n'est autre chose que la quantité dont s'accroît, pendant chaque unité de tems, la vîtesse d'un corps abandonné à la gravité seule (154); ou, si on veut, le double de l'espace

qu'il parcourt pendant la première unité de tems; et on a reconnu qu'en prenant pour unité la cent millième partie du jour, on a $g = 7{,}322$ mètres; et qu'en prenant la seconde sexagésimale pour unité, on a

$$g = 9{,}809 \text{ mètres, ou } g = 30{,}2 \text{ pieds} \ldots\ldots (g).$$

En attribuant à g cette valeur, on a donc pour la hauteur e dont un corps grave tombe, dans le vide, pendant le tems t; pour la vîtesse v qu'il a acquise au bout de ce tems; et enfin pour la relation entre cette vîtesse et cette hauteur, les équations

$$\left.\begin{aligned} e &= \tfrac{1}{2}gt^2, \quad v = gt \\ e &= \frac{v^2}{2g}, \quad v = \sqrt{(2ge)} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (h).$$

Ces deux dernières équations sont d'un fréquent usage; on appelle *Vitesse due à une Hauteur* la vitesse qu'un corps grave a acquise après être tombé de cette hauteur, abstraction faite de toute résistance. On comprendra aisément le sens de l'énonciation suivante, *Hauteur due à une Vitesse*. On voit que les dernières équations sont destinées à faire connoître la vîtesse lorsque la hauteur est donnée, et réciproquement.

157. On peut obtenir, au moyen des équations (h), la solution de tous les problèmes relatifs à la chûte des corps pesans. Nous en mettrons ici plusieurs; et comme l'usage de la seconde sexagésimale est plus familier, nous la préférerons, et nous emploierons les équations (g).

I. Combien de tems un corps mettra-t-il à tomber de 400 mètres ? L'équation $e = \frac{1}{2}gt^2$, en faisant $e = 400$, donne

$$t^2 = \frac{400}{4{,}904}, \text{ d'où } t = \sqrt{\left(\frac{400}{4{,}904}\right)} = 9{,}03.$$

Ainsi ce corps emploiera un peu plus de 9 secondes.

II. Quelle sera la vitesse de ce corps à la fin de sa chûte. $v = gt$ devient ici $v = 9{,}809 \times 9{,}03 = 88{,}57$. Autrement on a $v = \sqrt{(2ge)} = \sqrt{(19{,}618 \times 400)} = 88{,}57$. Ainsi il parcourroit uniformément $88^m{,}57$ par seconde.

III. Un corps pesant ne peut parvenir au fond d'un précipice qu'au bout de $7''$, quelle en est la profondeur; l'équation $e = \frac{1}{2} gt^2$ donne pour cette profondeur $e = 4{,}904 \times 49 = 240^m{,}3$.

IV. De quelle hauteur faut-il qu'un corps pesant tombe pour acquérir une vitesse de 400^m par seconde? L'équation $e = \frac{v^2}{2g}$ donne $e = \frac{(400)^2}{19{,}618} = 8156$.

V. Si le corps pesant avoit reçu une certaine vitesse verticale V, on auroit alors pour l'équation de son mouvement, en prenant le point de départ pour origine,

$$e = Vt + \tfrac{1}{2} gt^2, \text{ ou } e = Vt - \tfrac{1}{2} gt^2,$$

suivant que la vitesse auroit été imprimée de haut en bas, ou de bas en haut, les e étant comptés dans le sens de cette vitesse. Dans le second cas, on a $v = V - gt$; ce qui est d'ailleurs évident, puisque la vitesse imprimée par la pesanteur de haut en bas est gt au bout du tems t. Cette expression fait voir que le corps montera tant qu'on aura $V > gt$; au point où $V = gt$, on aura $v = 0$; le mobile sera alors parvenu à sa plus grande élévation : enfin lorsqu'on aura $V < gt$, v sera négatif; c'est-à-dire, que le projectile redescendra, parce que sa vitesse initiale aura été épuisée par la pesanteur. Le *maximum* d'élévation est $\frac{V^2}{2g}$, et le tems employé à l'atteindre est $\frac{V}{g}$. Le corps descendra ensuite de l'état de repos suivant les lois connues; l'équation de son mouvement sera $e = \frac{1}{2} gt^2$, en comptant

les e de haut en bas. Au bout du tems $t = \frac{V}{g}$, le mobile aura parcouru l'espace $\frac{V^2}{2g}$, ainsi il emploiera à redescendre au point de départ le même tems qu'il a mis à monter : enfin sa vîtesse en ce point sera V, c'est-à-dire, sera la vîtesse de projection.

On peut donc trouver à quelle élévation est parvenu un corps jeté verticalement, quand on connoît le tems écoulé depuis l'origine de son mouvement jusqu'à l'instant de sa chûte. Par exemple, un corps qui lancé verticalement n'est retombé qu'au bout de $18''$, a mis nécessairement $9''$ à s'élever : on a donc pour la hauteur cherchée

$$e = \tfrac{1}{2} g t^2 = 4{,}904 \times 81 = 397{,}224 \text{ mètres.}$$

Nous réserverons dorénavant la lettre g pour désigner la force de la pesanteur.

IV. *Application des formules du Mouvement Varié.*

Nous allons appliquer à quelques exemples les formules (c), (d) et (e) du mouvement varié, et développer les principes dont nous avons donné l'exposition (153).

158. Supposons qu'un point matériel placé en A soit sollicité par deux forces ; l'une tendant à l'animer de A vers B d'un mouvement uniformément varié : l'autre tendant au contraire à le repousser de A vers D, et agissant en raison inverse de la distance du mobile au point B : cherchons les diverses circonstances du mouvement. Fig. 92.

Soit $AB = a$, $AN = e =$ l'espace parcouru au bout du tems : si on désigne par χ la force accélératrice qui provient de la répulsion du mobile de N vers D, et par m

la valeur de cette force à l'unité de distance du point B, on aura, par la nature de la question $\frac{NB}{1}$ ou $\frac{a+e}{1} = \frac{m}{\chi}$; donc $\chi = \frac{m}{a+e}$. Soit enfin g la force accélératrice constante qui agit sur le mobile de N vers B. La force φ qui anime en effet le corps au bout du tems t, est la différence entre ces deux forces, d'où $\varphi = \chi - g$; donc on a les trois équations

$$\varphi = \frac{m}{a+e} - g, \quad \varphi de = v dv, \quad de = v dt,$$

entre lesquelles il s'agit d'éliminer deux des quatre variables e, t, v et φ. La seconde et la première donnent

$$v dv = \left(\frac{m}{a+e} - g\right) de, \text{ d'où } \tfrac{1}{2} v^2 = m \log(a+e) - ge + C.$$

Pour déterminer la constante C, observons qu'au point A on a $v = 0$, $e = 0$; on en conclut $C = -m \log a$. Donc

$$v = \pm \sqrt{(2m \times \log\left(\frac{a+e}{a}\right) - 2ge)} \ldots . (i);$$

équation qui détermine la vîtesse que le mobile a acquise, après avoir parcouru l'espace e. Pour obtenir une relation entre e et t, il faudroit mettre ici pour v sa valeur $\frac{de}{dt}$, et intégrer de nouveau.

159. Le problème que nous venons de résoudre se pré- Fig. 74. sente dans une circonstance remarquable. Si un corps pesant, tel qu'un piston, ferme un cylindre ou tube vertical BD, ouvert seulement à l'extrémité D, et si la partie AB, contient un fluide élastique comprimé, il est clair, qu'en faisant abstraction du frottement du piston contre les parois du tube, ce piston sera soumis à l'action de la pe-

santeur et de la pression de l'air extérieur qui tendront à le faire descendre avec une force constante g, et à la force répulsive du fluide élastique : or on sait que le ressort du fluide est d'autant moindre, que l'espace qui le contient est plus grand, ou que le piston est plus éloigné de B; ainsi la force provenant de la vapeur expansive agit en raison inverse de la distance du piston mobile au point B.

On trouve un exemple bien simple de cette espèce de mouvement dans les armes à feu : on sait que l'inflammation de la poudre développe instantanément une grande quantité de fluide aériforme : cette vapeur expansive contrainte dans un espace étroit, chasse avec force le projectile que l'arme contient. Si on suppose que $e = AD =$ la distance de l'orifice du canon, au point de départ de la balle; $a + e$ est la longueur totale BD de ce canon; et v désigne alors la vîtesse du boulet au sortir du canon. La longueur qu'il convient de donner au canon pour que cette vîtesse soit la plus grande possible, se trouve aisément en égalant à zéro la valeur de $\frac{dv}{dt}$, et déduisant ensuite celle de $a + e$: or cela revient à supposer que la force $\varphi = 0$ (ce qui est d'ailleurs évident, puisqu'alors $\chi = g$), et on a $a + e = \frac{g}{m}$.

On peut faire abstraction de la résistance de l'air et du poids du boulet, qui altèrent peu la vîtesse jusqu'à l'orifice D du canon : ce poids est d'ailleurs nul lorsque l'axe du tube est horisontal. Si on fait $g = 0$, ou, ce qui revient au même, si on ne suppose dès l'origine du calcul d'autre force que $\chi = \frac{m}{a+e}$, on a

$$v = \sqrt{\left\{2m.\log\left(\frac{a+e}{a}\right)\right\}} \ldots (k),$$

Fig. 93. 160. Soit en D un point matériel sollicité par une force accélératrice, agissant de D vers B en raison inverse du quarré de la distance de ce mobile au point B : cherchons les circonstances du mouvement.

Soit $BD = a$, $DN = e =$ l'espace parcouru au bout du tems t : lorsque le mobile sera parvenu en N, la distance BN sera $a - e$; désignons par m la valeur de la force attractive lorsque le mobile est à l'unité de distance du point B, on a par la nature de cette force φ, $\frac{\varphi}{1^2} = \frac{m}{\overline{BN}^2} = \frac{m}{(a-e)^2}$: on a donc ici les trois équations

$$\varphi = \frac{m}{(a-e)^2}, \quad \varphi de = v dv, \quad v dt = de.$$

On élimine la quantité φ entre les deux premières, et on a $v dv = \frac{m de}{(a-e)^2}$, d'où on tire $v^2 = \frac{2m}{a-e} + C$. Supposons qu'à l'origine D, le mobile n'étoit animé d'aucune vitesse, c'est-à-dire, n'avoit reçu aucune impulsion ; on avoit donc en même tems $e = 0$, et $v = 0$, ainsi $C = -\frac{2m}{a}$; en substituant et réduisant on obtient

$$v = \sqrt{\left(\frac{2m}{a}\right)} \times \sqrt{\left(\frac{e}{a-e}\right)} \ldots\ldots (l).$$

Pour obtenir la relation entre e et t, il suffit de mettre pour v sa valeur $\frac{de}{dt}$, et d'intégrer : or pour faciliter l'intégration, il importe de simplifier le radical $\sqrt{\left(\frac{e}{a-e}\right)}$; nous multiplierons donc cette fraction haut et bas par $a - e$, et le radical sera $\frac{\sqrt{(ae - e^2)}}{a-e}$: donc on a

$$dt = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a}{2m}\right)} \times \frac{a-e}{\sqrt{(ae-e^2)}}.de.$$

Mais $\frac{a-e}{\sqrt{(ae-e^2)}}$ équivaut à $\frac{(\frac{1}{2}a-e).de}{\sqrt{(ae-e^2)}} + \frac{1}{2}a \times \frac{de}{\sqrt{(ae-e^2)}}$.

Le premier terme a pour intégrale $\sqrt{(ae-e^2)}$: quant au second, en changeant e en $\frac{1}{2}a - z$, il devient $\frac{1}{2}a \times \frac{-dz}{\sqrt{(\frac{1}{4}a^2-z^2)}}$ dont l'intégrale est. . . . . .

$\frac{1}{2}a \times \text{arc}\left(\cos = \frac{2z}{a}\right) = \frac{1}{2}a \times \text{arc}\left(\cos = \frac{a-2e}{a}\right)$ (*).

On a donc

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a}{2m}\right)}\left\{\sqrt{(ae-e^2)} + \frac{1}{2}a \times \text{arc}\left(\cos = \frac{a-2e}{a}\right)\right\}.$$

On n'ajoute pas de constante parce que e et t sont nuls en même tems.

Voici une construction graphique de cette formule. Soit décrit sur $DB = a$ comme diamètre un demi-cercle DMB; l'abscisse DN étant $= e$, l'ordonnée NM est comme on sait $= \sqrt{(ae-e^2)}$: de plus DM est l'arc dont le sinus verse est e, dans le cercle DMB dont le rayon est $\frac{1}{2}a$; donc $NM + MD$ représente le second facteur de la valeur de t, et on a $t = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a}{2m}\right)} \times [NM + MD]$. Pl. 9.

(*) On intègre aussi $\frac{\frac{1}{2}a.de}{\sqrt{(ae-e^2)}}$ en observant que cette expression est la différentielle de l'arc dont le sinus verse est e dans le cercle dont le rayon est $\frac{1}{2}a$, ou, si on veut, $\frac{1}{2}a \times \text{arc}\left(\text{sin ver.} = \frac{e}{\frac{1}{2}a}\right)$ dans le cercle dont le rayon est 1 ; ou enfin $\frac{1}{2}a \times \text{arc}\left(\cos = \frac{a-2e}{a}\right)$.

Les valeurs ci-dessus de v et de t donnent la solution complette du problême proposé, et renferment toutes les circonstances particulières du mouvement. Si on fait $e = a$, on obtient

$$v = \infty, \text{ et } t = \sqrt{\left(\frac{a}{2m}\right)} \times \frac{a\pi}{2}.$$

La première valeur indique que la vîtesse du point mobile au centre B d'attraction est infinie, ce qui est aisé à concevoir, puisque l'intensité de la puissance croît d'autant plus que le mobile est plus voisin du centre. La seconde expression donne le tems nécessaire pour arriver à ce centre; elle est proportionnelle à $a\sqrt{a}$, ou $\sqrt{a^3}$: ainsi *les tems employés par deux corps partant du repos, pour arriver au centre d'attraction, sont entr'eux comme les racines quarrées des cubes de leurs distances initiales à ce centre.*

161. On a nommé *Force Centripète* cette force d'attraction vers un centre fixe : les observations les plus constantes établissent que l'attraction est une des propriétés dont jouit la matière (voyez n°. 187); on a même reconnu que pour deux points matériels de masses égales, cette attraction avoit lieu en raison inverse du quarré de leurs distances. Le problême que nous venons de résoudre s'applique aux corps pesans placés à la surface du globe : il ne faut pour cela que regarder e comme très-petit par rapport à a, et a comme le rayon de la terre. Par là les valeurs précédentes de v et de dt deviennent $v = \frac{\sqrt{(2me)}}{a}$, et $dt = \frac{ade}{\sqrt{(2me)}}$. Or puisque m et g sont les valeurs de la force d'attraction aux distances 1 et a, du centre de la terre : on a donc $\frac{m}{a^2} = \frac{g}{1}$, ou $m = a^2g$: ainsi

$$v = \sqrt{(2ge)}, \text{ et } t = \frac{1}{\sqrt{(2g)}} \times \int \frac{de}{\sqrt{e}} = \frac{2\sqrt{e}}{\sqrt{(2g)}}.$$

Cette dernière équation équivaut à $e = \frac{1}{2}gt^2$. Ces équations sont les mêmes que nous avons déja obtenues (*h*), ce qui montre qu'on peut regarder la pesanteur terrestre, comme un cas particulier de l'attraction universelle. On auroit pu déduire aussi ce dernier résultat de la construction indiquée ci-dessus, fig. 94 : car alors l'arc DM est très-petit par rapport au diamètre DB, et peut être considéré comme égal à son sinus NM, qui $= \sqrt{(ae - e^2)}$, et qui dans ce cas se réduit à $\sqrt{(ae)}$; donc la valeur de t est . . . . . $\sqrt{\left(\frac{a}{2m}\right)} \times 2\sqrt{(ae)} = 2\sqrt{\left(\frac{e}{2g}\right)}$, ainsi qu'on l'a déja trouvé. Fig. 94.

162. Lorsqu'un corps se meut dans un fluide, il est obligé d'employer une partie de la force dont la puissance motrice l'a animé, pour déplacer les molécules fluides, se faire entr'elles un passage, et se mouvoir : c'est ce qui sera rendu manifeste après que nous aurons traité du choc des corps (218). Cet effort employé par un corps qui se meut dans un fluide, est visiblement dirigé dans le sens même de son mouvement ; il dépend de la vîtesse qui l'anime. La résistance du fluide peut donc être assimilée à une force directement opposée au mouvement du corps, et variable avec sa vîtesse suivant une certaine loi : on peut donc considérer un corps mu dans un fluide, comme mis en mouvement dans le vide, pourvu qu'outre le système de forces qui agissent sur lui, on en conçoive une de plus qui exerce son action en sens contraire du mouvement, et dont l'intensité soit dépendante de la vîtesse du mobile. Quant à la loi que suit cette dépendance, on a coutume de prendre *la force retardatrice de la résistance du fluide*,

proportionnelle au quarré de la vitesse. Les considérations théoriques qu'emploient plusieurs auteurs pour démontrer cette proposition sont peu satisfaisantes ; cependant on peut la regarder comme exacte quand le fluide est indéfini ; c'est du moins ce que l'expérience confirme.

Cela posé, analysons le mouvement d'un corps pesant lancé verticalement de bas en haut dans l'atmosphère avec une vîtesse V : d'après ce qui vient d'être exposé, ce corps pourra être considéré comme animé par deux forces, savoir : 1°. la pesanteur g, qui tendra à le faire descendre et qui sera dirigée en sens opposé de la vîtesse imprimée V ; 2°. la force retardatrice du fluide, dont la valeur au bout du tems t sera représentée par mv^2 ; v étant la vîtesse du corps à cet instant ; et m un coefficient constant qui dépend de la nature du fluide ; c'est la valeur de cette force lorsque le corps a l'unité de sa vîtesse. Cette force étant dirigée en sens opposé du mouvement, on n'a qu'une force $= g + mv^2$, ou plutôt $= -(g + mv^2)$, à cause qu'elle agit en sens contraire de l'impulsion primitive : cette impulsion entrera d'ailleurs bientôt en considération ; elle ne fait pas partie des forces qui agissent au bout du tems t. Ainsi on a les trois équations

$$\varphi = -(g + mv^2), \quad \varphi dt = dv, \quad \text{et } \varphi ds = v dv.$$

En mettant pour φ sa valeur dans les deux dernières, on a

$$dt = -\frac{dv}{g + mv^2}, \quad ds = \frac{-v dv}{g + mv^2}.$$

Il est facile d'intégrer ces deux équations ; et on obtient

$$\sqrt{(mg)}.t = C - \text{arc}\left\{\text{tang} = \left(v.\sqrt{\frac{m}{g}}\right)\right\}$$

$$2me = C' - \log(g + mv^2).$$

Les constantes C et C' se déterminent en observant que la

question exige qu'on ait en même tems $t = 0$, $e = 0$, $v = V$; nous ferons, pour abréger, la constante $m = a^2 g$: nous aurons donc $C = \text{arc}(\text{tang} = aV)$ et $C' = \log\{g(1 + a^2V^2)\}$; ce qui transforme les valeurs ci-dessus en

$$agt = \text{arc}(\text{tang} = aV) - \text{arc}(\text{tang} = av)$$
$$2ga^2e = \log\left(\frac{1 + a^2V^2}{1 + a^2v^2}\right).$$

Ces deux valeurs servent à faire connoître l'espace parcouru par le mobile, et sa vitesse au bout du tems t : elles doivent remplacer celles que nous avons trouvées (156 et 157) lorsque nous avons fait abstraction de la résistance du fluide. Si on fait $v = 0$, on a pour la plus grande élévation E, à laquelle le mobile puisse parvenir en vertu de sa force de projection ; et pour le tems T qu'il y emploie

$$2ga^2E = \log(1 + a^2V^2), \quad agT = \text{arc}(\text{tang} = aV).$$

Parvenu à son maximum d'élévation, le mobile a épuisé sa vitesse de projection ; il redescend donc : mais ici la force retardatrice de la résistance du fluide agit tout-à-coup en sens opposé, et les équations auxquelles nous venons de parvenir n'ont plus lieu : ainsi le mouvement n'est plus assujetti à la loi de continuité. Pour analyser ce cas, proposons-nous de chercher le mouvement d'un corps pesant lancé verticalement de haut en bas. La force accélératrice est alors $g - mv^2$, et on a

$$\varphi = g - mv^2, \quad \varphi dt = dv, \quad \varphi de = vdv;$$

d'où on conclut $dt = \frac{dv}{g - mv^2}$, et $de = \frac{vdv}{g - mv^2}$; donc on a en intégrant, et faisant, comme ci-dessus, $m = a^2 g$,

$$agt = C + \text{arc}(\text{sin} = av)$$
$$2a^2ge = C' - \log g(1 - a^2v^2).$$

Comme $t = 0$, donne $e = 0$ et $v = V$; on trouve

$$C = -\text{arc}\,(\sin = aV) \text{ et } C' = \log g\,(1 - a^2V^2).$$

Donc enfin on a pour les équations du mouvement

$$agt = \text{arc}\,(\sin = av) - \text{arc}\,(\sin = aV)$$
$$2a^2ge = \log\left(\frac{1 - a^2V^2}{1 - a^2v^2}\right).$$

Dans le cas où le mobile auroit été abandonné à l'action de la gravité, sans avoir reçu d'impulsion, il suffiroit de faire dans ces formules $V = 0$; ce qui donne pour ce cas

$$agt = \text{arc}\,(\sin = av), \quad -2a^2ge = \log\,(1 - a^2v^2).$$

Ces équations sont susceptibles d'expressions plus simples; car en désignant par c la base des logarithmes népériens, la seconde donne

$$av = \sqrt{\{1 - c^{-2aage}\}}.$$

Or en observant que l'arc dont le sinus est av ou $\sqrt{\{1 - c^{-2aage}\}}$ a pour cosinus $c^{-aage} = \frac{1}{c^{aage}}$, la première de nos deux équations devient

$$agt \text{ ou } \sqrt{(mg)}\,t = \text{arc}\left(\cos \frac{1}{c^{aage}}\right).$$

Telles sont les formules générales du mouvement vertical des corps pesans dans les milieux résistans.

CHAPITRE II.

DU MOUVEMENT D'UN POINT EN LIGNE COURBE.

I. *Propositions générales.*

163. VOICI comment la notion du mouvement curviligne peut être déduite des premiers élémens de la Mécanique. Soit AB la direction d'une force qui donne une impulsion au point mobile A : il parcourra uniformément cette ligne, si aucune cause n'altère son mouvement. Mais supposons que parvenu en B, ce point soit soumis à l'action d'une autre force qui lui communique dans le sens BD une impulsion; en formant le parallélogramme $BCED$, sur les parties BC, BD, proportionnelles aux vitesses imprimées, on sait que le corps décrira la diagonale BE. Si de même le mobile reçoit une impulsion suivant GE, il parcourra EF; et ainsi de suite. On voit donc qu'il décrira le polygone $ABEF$: mais si on suppose que les intervalles de tems, qui séparent ces diverses impulsions, sont plus courts, le polygone aura de plus petits côtés; de sorte qu'il est facile de voir que le mobile décrira en effet une courbe, si les forces agissent sans interruption. Fig. 95.

164. Il suit de là que le point mobile qui décrit un polygone $ABEF$ doit continuer à décrire uniformément le dernier côté EF, si aucune force ne vient agir de nouveau; et que par conséquent *lorsqu'un mobile décrit une courbe, si à un instant quelconque l'action des puis-*

sances cesse tout-à-coup, le mobile doit parcourir uniformément [illegible] *courbe, au point où les forces ont cessé d'agir sur lui.* En effet, on peut regarder chaque élément de cette courbe comme le côté infiniment petit d'un polygone. Ainsi le corps change à chaque instant la direction de son mouvement, qui est celle de la tangente.

Lorsqu'un corps décrit une courbe en vertu de l'action de certaines forces, pour se faire une idée de ce que désigne le mot *vitesse*, il faut supposer que la courbe est rectifiée, et que tout-à-coup les forces cessent d'agir; l'espace décrit par le mobile durant l'unité de tems est sa vîtesse à l'instant où ce changement s'est produit. Soit donc *KMZ* la courbe que parcourt un point matériel; si au bout du tems *t* le corps est parvenu en *M*, en nommant *s* l'arc *KM* décrit, si tout-à-coup les forces cessent d'agir, le corps devra décrire uniformément la tangente *MH*, avec une vîtesse $v = \frac{ds}{dt}$. Fig. 102.

165. Quelles que soient les forces qui agissent sur un mobile, on peut toujours les décomposer en trois autres parallèles à trois axes rectangulaires; il est clair que chaque composante aura un effet indépendant des deux autres (146, 4°.), et que par conséquent on peut appliquer à chacune ce qui a été dit des mouvemens rectilignes. C'est par ce moyen qu'on parvient à connoître les propriétés du mouvement d'un point, et la nature de la ligne qu'il parcourt, et qu'on nomme *Trajectoire*, lorsque les forces qui agissent sur lui sont données en grandeur et en direction. Le mouvement curviligne se réduit par là naturellement à deux ou trois mouvemens rectilignes, selon que la courbe décrite est à simple ou à double courbure. En effet, en rapportant cette courbe à

des coordonnées rectangulaires, il est clair que la détermination du point de la trajectoire où ce mobile se trouvera à chaque instant, dépendra de la valeur de ces coordonnées au même instant : de sorte que chacune de ces coordonnées sera une fonction du tems, et pourra représenter l'espace rectiligne parcouru par un mobile qui seroit la projection du vrai mobile sur chacun des axes coordonnés.

Ainsi, lorsque la trajectoire est plane, le mouvement pourra être représenté par les deux équations $x = Ft$, $y = ft$, qui seront celles des mouvemens rectilignes de deux mobiles suivant les axes des x et des y. En éliminant t entre ces équations, on obtiendra, en x et en y, une relation qui sera l'équation de la ligne parcourue par le mobile, puisqu'elle exprimera une relation indépendante du tems t, entre les variables x et y. De même si la trajectoire est à double courbure, le mouvement sera représenté par trois équations $x = Ft$, $y = ft$, $z = \chi t$; en éliminant t, on obtient deux équations en x, y et z, qui sont celles de la courbe à double courbure que décrit le corps.

Tout ceci s'éclaircira par la suite. Il ne s'agit que de déduire les équations $x = Ft$, $y = ft$, $z = \chi t$ de la nature des puissances, ou plutôt trois équations entre les quatre variables x, y, z et t; c'est ce qui va être développé.

166. Soient, au bout du tems t, P', P'',... les forces continues qui agissent sur le mobile ; α', α''...; ζ', ζ''...; γ', γ''..., les angles formés par leurs directions avec les axes respectifs des x, y et z. Décomposons chaque force en trois autres parallèles à ces axes, ce qui donne, d'après ce qu'on a vu (24), trois forces X, Y et Z, qui agissent ensemble sur le corps, et lui impriment une impulsion élémentaire, chacune dans sa direction. On a

$$\left.\begin{aligned} X &= P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + \text{etc.} \\ Y &= P' \cos \beta' + P'' \cos \beta'' + \text{etc.} \\ Z &= P' \cos \gamma' + P'' \cos \gamma'' + \text{etc.} \end{aligned}\right\} \ldots (a').$$

Il est inutile de dire que chacune de ces composantes doit être prise avec le signe qui lui appartient, et qui se détermine d'après les considérations développées (26).

Au bout du tems t, le mobile, placé sur sa trajectoire au point qui a x, y et z pour coordonnées, a donc dans le sens des x la vîtesse $\frac{dx}{dt}$; de sorte qu'en ce point on peut concevoir ce mobile comme en repos, et recevant dans le sens des x une impulsion qui lui imprime la vîtesse $\frac{dx}{dt}$. Cette vîtesse doit s'accroître par l'effet des forces continues P', P'',... de $d\left(\frac{dx}{dt}\right)$, durant le tems dt; ainsi elle devient $\frac{dx}{dt} + d\left(\frac{dx}{dt}\right)$. Or la vîtesse qui est imprimée au corps dans le sens des x, est en effet $\frac{dx}{dt} + X dt$, et comme les effets des forces de directions rectangulaires sont indépendans (145), les puissances Y et Z ne changent rien à cette vîtesse. On en conclut que la vîtesse $X dt - d\left(\frac{dx}{dt}\right)$ est nulle. On prouveroit la même chose par rapport aux axes des y et des z, ainsi on a

$$\left.\begin{aligned} X dt - d\left(\frac{dx}{dt}\right) &= 0, \\ Y dt - d\left(\frac{dy}{dt}\right) &= 0, \\ X dt - d\left(\frac{dz}{dt}\right) &= 0, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (b').$$

ou bien, en prenant dt constant,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z \ldots . (c').$$

Telles sont *les équations générales du mouvement libre d'un point.* Elles doivent être employées à la fois lorsque les forces P', P''... sont dans des plans différens ; mais deux d'entr'elles suffisent dans le cas contraire : elles remplacent d'ailleurs les équations $x = Ft$, $y = ft$, $z = \chi t$, dont nous avons parlé dans le numéro précédent, qui appartiennent aux mouvemens des trois mobiles suivant les axes, de manière à être la projection du vrai mobile à chaque instant.

167. Les équations (b') ou (c') servent à faire connoître toutes les circonstances du mouvement d'un point matériel libre, et soumis à l'action des forces continues, données à chaque instant, en grandeur et en direction, c'est-à-dire, servent à déterminer la vîtesse du mobile, et son lieu à un instant déterminé, ainsi que sa trajectoire. En effet, supposons pour plus de simplicité que les forces soient dans le plan des xy ; X et Y étant constans ou variables, mais donnés, il ne s'agit que d'éliminer le tems entre les deux équations $\frac{d^2x}{dt^2} = X$, $\frac{d^2y}{dt^2} = Y$. Si on conçoit ce calcul effectué, ainsi que la double intégration, on aura une équation entre x y, qui sera celle de la trajectoire. On pourra même obtenir de semblables relations entre x et t, et y et t. Les valeurs de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ donneront les vîtesses du mobile dans le sens des x et des y : on en concluera sa vîtesse réelle, qui est

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}}$$

Enfin les équations entre x et t, y et t, donneront la position du mobile pour chaque valeur connue du tems t.

Nous aurons, par la suite, plusieurs occasions d'appliquer les équations (b', c'); nous ferons seulement observer que la double intégration exige deux constantes : la première sera ajoutée dans l'équation différentielle du premier ordre; elle sera déterminée par la valeur de la vîtesse qui avoit lieu à un instant donné, tel qu'au commencement du tems t : la seconde dépendra de la disposition du mobile, par rapport aux axes, à cet instant. Ces principes deviendront plus lucides à l'aide des diverses applications que nous en ferons : nous ne les énonçons ici que pour faire sentir toute l'importance des équations (b', c'), et pour faire voir en même tems que, quoiqu'elles ne dépendent que des forces accélératrices, elles renferment néanmoins implicitement la vîtesse et le lieu du mobile au commencement du mouvement.

168. On peut employer le calcul précédent pour assigner la vîtesse du mobile à un instant déterminé; mais il n'est guère praticable que lorsque X, Y et Z ne sont pas fonctions de x, y et z. Ainsi il est plus élégant d'employer la formule suivante. Multiplions la première des équations (c') par dx, la seconde par dy, la troisième par dz, et ajoutons : il vient

$$\frac{dx \cdot d^2x + dy \cdot d^2y + dz \cdot d^2z}{dt^2} = Xdx + Ydy + Zdz.$$

Or

$$dx \cdot d^2x + dy \cdot d^2y + dz \cdot d^2z = \tfrac{1}{2} d(dx^2 + dy^2 + dz^2) = \tfrac{1}{2} d(ds^2);$$

donc en intégrant on a

$$\frac{ds^2}{dt^2} = v^2 = A + 2\int(Xdx + Ydy + Zdz) \ldots\ldots (d'').$$

Pour que cette équation puisse être appliquée à des circonstances de mouvement, il faut que $Xdx+Ydy+Zdz$ soit une différentielle exacte. Si donc on considère X, Y et Z comme des fonctions de x, y et z, elles devront satisfaire aux conditions suivantes

$$\frac{dX}{dy}=\frac{dY}{dx},\ \frac{dX}{dz}=\frac{dZ}{dx},\ \frac{dY}{dz}=\frac{dZ}{dy}\ \ldots\ldots\ (c'),$$

et on pourra regarder $Xdx+Ydy+Zdz$, comme la différentielle d'une certaine fonction χ de x, y et z facile à trouver; c'est-à-dire, qu'on a $Xdx+Ydy+Zdz=d\chi$; donc

$$v^2=A+2\chi\ldots\ldots\ (d').$$

La valeur de la constante A dépend de la vîtesse initiale du mobile.

Il est inutile d'insister pour faire voir que lorsque la trajectoire est plane et dans le plan des xy, cette dernière équation a lieu; mais qu'alors $d\chi=Xdx+Ydy$ et que de plus on a $\frac{dX}{dy}=\frac{dY}{dx}$; X et Y sont d'ailleurs supposées des fonctions de x et y, indépendantes du tems t.

169. Si le mobile n'est soumis à l'action d'aucune force accélératrice, c'est-à-dire, s'il ne se meut qu'en vertu d'une impulsion, on a $X=0$, $Y=0$, $Z=0$: donc $v^2=A$; ainsi la vîtesse est constante. Les équations (c') donnent $\frac{dx}{dt}=c$, $\frac{dy}{dt}=c'$, $\frac{dz}{dt}=c''$; d'où on tire $\frac{dx}{dy}=\frac{c}{c'}$; $\frac{dx}{dz}=\frac{c}{c''}$; les équations des projections de la trajectoire sont donc $c'x=A+cy$, $c''x=B+cz$; ce qui fait voir que le mobile a un mouvement rectiligne et uniforme, proposition d'ailleurs évidente.

170. Les équations (c') conduisent à une conséquence remarquable. Pour la rendre plus facile à saisir, nous supposerons d'abord que la trajectoire est dans le plan xy: on ne doit alors employer que les deux premières valeurs (c'). Multiplions-les respectivement par y et par x, puis soustrayons; il vient $\frac{y\,.\,d^2x - x\,.\,d^2y}{dt^2} = Xy - Yx$; intégrant, on a

$$\frac{ydx - xdy}{dt} = C + \int (Xy - Yx)\,dt.$$

Or $Xy - Yx$ exprime le moment, par rapport à l'origine, des forces X et Y (27, 45). Ce moment ne sera nul que dans deux cas: 1°. lorsqu'on aura $X = 0$ et $Y = 0$, c'est-à-dire, lorsque le mobile ne sera mu que par une impulsion; 2°. lorsque les forces X et Y auront leur résultante dirigée vers l'origine: ce dernier cas est celui du système du monde, ainsi que nous le ferons voir bientôt (183). Dans ces deux cas, on a donc

$$C = \frac{ydx - xdy}{dt}, \text{ ou } Ct + C' = \int (ydx - xdy) \ldots (f'),$$

Fig. 96. Cela posé, on sait par les principes du calcul intégral que l'aire $ADMP$ d'une courbe est $= \int (ydx)$: concevons qu'on a mené de l'origine A, à deux points de cette courbe, des *rayons vecteurs* AC et AM, on aura pour l'aire ACM qu'ils comprennent $\xi = ADMP - AMP - ADC$, ou $\xi = \int (ydx) - \frac{1}{2}xy - ADC$. En différentiant, on obtient $d\xi = ydx - \frac{1}{2}d(xy)$, ou $d\xi = \frac{1}{2}(ydx - xdy)$. Mettons cette valeur dans l'équation (f'), elle devient $Ct + C' = 2\xi$, ou plutôt $\frac{1}{2}\,.\,Ct = \xi$; car on peut toujours supposer $C' = 0$, puisqu'il ne faut pour cela que prendre convenablement l'origine du tems t. Donc *les aires comprises entre les rayons vecteurs, menés de l'origine à*

trois points d'une trajectoire, sont proportionnelles aux tems employés à décrire les arcs interceptés, lorsque le corps ne se meut qu'en vertu d'une impulsion, ou lorsque les forces accélératrices qui l'animent sont dirigées vers l'origine. On voit aussi que les aires ne peuvent être proportionnelles aux tems que dans ces deux cas, puisqu'ils sont les seuls dans lesquels la quantité $Xy - Yx$ soit nulle.

Le même théorème a lieu lorsque la trajectoire est décrite dans l'espace; car si on multiplie la première des équations (c') par z, et la troisième par x, et qu'on les retranche; puis qu'on opère de même sur la seconde et la troisième, on aura dans les deux cas ci-dessus

$$\frac{xdz - zdx}{dt} = A, \quad \frac{ydz - zdy}{dt} = B.$$

On conclut de ces équations, qu'en nommant λ, λ' et λ'' les projections de l'aire ξ décrite par le rayon vecteur, on a $d\lambda = Cdt$, $d\lambda' = Adt$, $d\lambda'' = Bdt$: or l'aire élémentaire $d\xi$ étant considérée comme plane, est égale à la racine quarrée de la somme des quarrés de ses trois projections (Compl. de Géom. de *Lacroix*, 61). Donc on a $d\xi = dt\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}$; ce qui conduit à la même conséquence que ci-dessus : c'est elle qui constitue *le principe des Aires.*

II. *Mouvement des Projectiles.*

171. Pour appliquer les principes précédens à des exemples simples, nous prendrons d'abord le mouvement des projectiles dans le vide. Soit un point matériel A lancé dans le vide de la direction AD, avec la vîtesse U, produite par une impulsion. Si la gravité n'agissoit pas sur Fig. 9.

ce mobile, il parcourroit la droite AD uniformément; mais la pesanteur tend à l'écarter de cette droite, et lui fait décrire une courbe AMC que nous nous proposons de déterminer. Prenons l'axe des y vertical; comme il n'y a ici d'autre force que celle de la gravité, nous aurons $X=0$, $Z=0$, et $Y=-g$; ainsi les équations (c') deviennent

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0,\quad \frac{d^2z}{dt^2}=0,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=-g \quad \ldots (1).$$

En intégrant on obtient

$$\frac{dx}{dt}=c,\quad \frac{dz}{dt}=c'',\quad \frac{dy}{dt}=c'-gt.$$

La première de ces équations étant divisée par la seconde, on trouve, en intégrant $c''x=cz$; équation linéaire qui fait voir que la projection de la trajectoire sur le plan des xz, qui est horisontal, est une droite. Donc cette courbe est dans un plan perpendiculaire à celui des xz, et par conséquent vertical, passant par l'axe des y. Prenons le plan xy pour celui qui la contient, et nous n'aurons plus égard qu'aux équations

$$\frac{dx}{dt}=c,\quad \frac{dy}{dt}=c'-gt \quad \ldots (2).$$

En intégrant de nouveau on obtient (*)

$$x=ct,\quad y=c't-\tfrac{1}{2}gt^2 \quad \ldots (3).$$

(*) Les raisonnemens qu'on a faits n° 165 peuvent être employés ici avec avantage pour donner les équations (3) : car les composantes de la vitesse U, dans le sens des axes étant $U\cos\theta$, et $U\sin\theta$; le mobile devra parcourir dans ces directions les espaces $U.\cos\theta.t$, et $U.\sin\theta.t$, en vertu de l'impulsion qu'il a reçue. La gravité ne change rien à la première de ces deux quantités, et on a $x=U.\cos\theta.t$; mais la dernière doit être diminuée de l'espace $\frac{1}{2}gt^2$; et on a $y=U.\sin\theta.t-\frac{1}{2}gt^2$.

On n'ajoute point ici de constantes, parce qu'on doit trouver à-la-fois $t = 0$, $x = 0$, et $y = 0$. Ces équations sont celles des mouvemens de deux points matériels sur les axes des x et des y ; voyez ce qui a été dit n°. 165. Pour avoir l'équation de la trajectoire, il faut éliminer le tems t entre les deux valeurs (3) ; on trouve, $y = \frac{c'}{c}x - \frac{gx^2}{2c^2}$.

Quant aux constantes c et c', il est facile d'en trouver les valeurs : soit θ l'angle formé par la direction AD de l'impulsion avec l'horison. Les composantes de cette vîtesse dans les sens respectifs des x et des y, seront $U\cos\theta$ et $U\sin\theta$: d'ailleurs $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ sont au bout du tems t, les vîtesses du mobile dans les sens de ces axes : si donc on fait $t = 0$, dans les valeurs de (2), elles devront donner $\frac{dx}{dt} = U.\cos\theta$, et $\frac{dy}{dt} = U.\sin\theta$: donc on a $c = U.\cos\theta$, $c' = U.\sin\theta$, et $\frac{c'}{c} = \text{tang}\,\theta$. En substituant on obtient pour l'équation de la trajectoire

Fig. 97.

$$y = x.\text{tang}\,\theta - \frac{gx^2}{2U^2.\cos^2\theta} \quad \ldots \quad (g').$$

On peut aussi obtenir cette équation sous une forme simple, en mettant pour U^2 sa valeur $2gh$, h étant la hauteur due à la vîtesse U, (156) : car on a

$$y = x\,\text{tang}\,\theta - \frac{x^2}{4h.\cos^2\theta} \quad \ldots \quad (h').$$

Cette équation est celle d'une parabole, qu'il sera facile de construire : on trouvera qu'elle a son axe MB vertical, et que les coordonnées de son sommet sont $AB = 2h.\sin\theta.\cos\theta = h.\sin(2\theta)$, et $BM = h\sin^2\theta$; son paramètre est $4h.\cos^2\theta$.

172. Les calculs précédens conduisent à plusieurs conséquences remarquables.

1°. *La trajectoire que décrivent les projectiles dans le vide est une parabole.*

2°. Le *maximum* d'élévation du projectile est le point qui a pour coordonnées $AB = h.\sin(2\theta)$, $BM = h.\sin^2\theta$: on peut encore parvenir à ce résultat, en égalant à zéro la valeur de $\frac{dy}{dx}$, ainsi que l'exige la théorie des *maxima*.

3°. L'*amplitude du jet* est $AC = 2h.\sin(2\theta) = 2 \times AB$; car en faisant $y = 0$ dans l'équation (h'), on trouve pour x cette valeur.

4°. Si on veut que cette amplitude soit la plus grande possible, pour une vîtesse U donnée, il faut prendre pour θ la valeur qui rend $2h.\sin(2\theta)$, ou plutôt $\sin(2\theta)$, un maximum; ce qui a visiblement lieu lorsque $2\theta = \frac{1}{2}\pi$: donc $\theta = \frac{1}{4}\pi = 50^\circ$ est l'arc qui mesure l'inclinaison correspondante à la plus grande portée. On seroit aussi parvenu à ce résultat en différentiant $2h.\sin(2\theta)$ par rapport à θ, et égalant ensuite à zéro.

5°. En général, lorsque la vîtesse de projection est donnée, on peut se proposer de déterminer l'inclinaison qu'elle doit avoir pour qu'il en résulte une portée connue, et $= P$: alors il faut tirer la valeur de θ de l'équation $P = 2h.\sin(2\theta)$, ce qui donne $\theta = \frac{1}{2}.\text{arc}\left(\sin = \frac{P}{2h}\right)$. On voit d'abord que pour que le problème ne soit pas absurde, il faut qu'on ait $P < 2h$: on observe en outre qu'il y a deux solutions. En effet, soit $BA = \frac{P}{2h}$, et le rayon $CI = 1$; la droite CD qui divise en deux parties égales l'arc BI qui a pour sinus $\frac{P}{2h}$, satisfait à la question. Me-

Fig. 90.

nons BK parallèle à CI, l'arc IBK a aussi pour sinus AB; et la droite CD' qui divise cet arc en deux parties égales, correspondroit à la même portée. On peut même ajouter que les droites CD et CD', forment, de part et d'autre, des angles égaux avec la ligne CO qui divise l'angle droit LCI en deux parties égales; car $IB=\theta$, $ILK=\pi-\theta$: les moitiés de ces arcs sont $\frac{1}{2}\theta$ et $\frac{1}{2}(\pi-\theta)$ dont la somme est $\frac{1}{2}\pi$: ainsi $ID+ID'=IL$, d'où $ID=LD$, et par conséquent $OD=OD'$.

6°. Si la vitesse U est imprimée verticalement de bas en haut, on a $\theta=\frac{1}{2}\pi$; alors l'équation (h') ne peut être employée; mais les expressions (3) deviennent $x=o$, et $y=Ut-\frac{1}{2}gt^2$; la première indique que le corps n'a point de mouvement dans le sens des x; la seconde est la même que nous avons employée (157, V).

173. Cherchons maintenant la trajectoire des projectiles dans les milieux résistans; telle est celle que décrit un corps lancé par une bouche à feu dans l'atmosphère. Nous avons vu (162) que la résistance des fluides est assimilée à une force retardatrice, qui est proportionnelle au quarré de la vîtesse, et dont la direction est sans cesse opposée à celle du mouvement; ainsi il suffit d'introduire la considération de cette puissance, dans la question que nous venons de résoudre; et nous aurons à analyser les circonstances du mouvement d'un corps en vertu d'une force de projection, et de deux forces constantes, la gravité g, et la résistance R du fluide: l'une qui agit verticalement de haut en bas, et l'autre qui est dirigée suivant la tangente en chaque point de la trajectoire.

On a coutume de substituer à cette courbe la parabole, parce qu'elle est la trajectoire dans le vide, et qu'on regarde l'air comme un fluide assez subtil, pour que la résistance qu'il oppose puisse être négligée: elle est en effet

peu sensible, lorsque la vîtesse du mobile est très-petite. Mais dans le cas contraire, qui se rencontre beaucoup plus fréquemment, l'erreur est si considérable, qu'elle peut aller même, jusqu'à donner une portée dix fois trop grande. Le problême de la *Ballistique* est donc aussi intéressant comme objet d'application qu'il l'est sous le point de vue analytique. NEWTON, EULER, ... et dernièrement LEGENDRE ont donné des solutions élégantes de cette question; et si elles sont compliquées, il est facile de voir que cette difficulté est inévitable et tient à la nature même du problême.

Prenons l'axe des y vertical : désignons par x, y et z les coordonnées du lieu du mobile au bout du tems t, et par s l'arc décrit. On sait que $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, et $\frac{dz}{ds}$ sont les cosinus des angles formés par la tangente avec les axes respectifs des x, des y et des z : ainsi les composantes de la force R dans le sens de chacun de ces axes, sont $R.\frac{dx}{ds}$, $R.\frac{dy}{ds}$ et $R.\frac{dz}{ds}$; les équations (a') deviennent donc ici, $X = -R.\frac{dx}{ds}$, $Y = -\left(R.\frac{dy}{ds} + g\right)$, $Z = -R.\frac{dz}{ds}$: on affecte ces forces de signes négatifs, parce qu'elles tendent à diminuer les coordonnées x, y et z. Les équations (b') donnent donc

$$d\left(\frac{dx}{dt}\right) = -Rdt.\frac{dx}{ds}$$
$$d\left(\frac{dy}{dt}\right) = -\left(R.\frac{dy}{ds} + g\right)dt$$
$$d\left(\frac{dz}{dt}\right) = -Rdt.\frac{dz}{ds}.$$

Si on prend dt constant, en divisant la première équa-

tion par la troisième on a $\frac{d^2x}{d^2z} = \frac{dx}{dz}$, d'où. . . . . $\frac{d^2x}{dx} = \frac{d^2z}{dz}$, et intégrant par logarithmes on conclut $dx = fdz$: donc l'équation de la projection de la trajectoire sur le plan des xz, qui est horisontal, est celle d'une droite : cela prouve que cette courbe est dans un plan vertical qui passe par l'origine ; ce qu'on eût pu aisément prévoir.

En regardant cette courbe comme située dans le plan xy, la troisième équation ci-dessus devient inutile : quant aux deux premières, comme aucune différentielle n'y est constante, en prenant dx constant on a

$$d^2t = \frac{dt^3}{ds}.R \quad \ldots\ldots (1).$$

$$\frac{dt.d^2y - dy.d^2t}{dt^2} = -\frac{dy}{ds}.Rdt - gdt.$$

Si on substitue dans celle-ci pour R sa valeur $\frac{ds.d^2t}{dt^3}$, tirée de la première, elle devient

$$d^2y + gdt^2 = 0 \quad \ldots\ldots (2).$$

Il s'agit maintenant d'éliminer le tems t entre les deux équations (1) et (2) : mais comme il faut pour cela traiter dt et d^2t comme deux inconnues, il faut se procurer une troisième équation. On l'obtient en différentiant la précédente, et on a $d^3y + 2gdt.d^2t = 0$; et mettant pour d^2t sa valeur (1), on a $d^3y + 2g.\frac{dt^4}{ds}.R = 0$. Or comme la résistance R est proportionnelle au quarré de la vîtesse v, on doit avoir

$$R = \tfrac{1}{2}A.v^2 = \tfrac{1}{2}A.\frac{ds^2}{dt^2}$$

$\frac{1}{2}A$ étant un coefficient constant, dont la valeur dépend de la nature du fluide résistant, et que l'expérience fait connoître. Cette valeur introduite dans l'équation précédente donne $d^2y + Ag.dt^2.ds = 0$, ou plutôt, en substituant pour dt^2 sa valeur (2),

$$\frac{d^3y}{dx^2y} = Ads.$$

Le premier membre ayant pour intégrale $\log(dx^2y)$, on a donc $\log(Cdx^2y) = As$, ou plutôt à cause de l'homogénéité et de dx constant, $\log\left(C.\frac{d^2y}{dx^2}\right) = As$. Ainsi, en désignant par e le nombre dont le logarithme népérien est l'unité, on a pour l'équation différentielle de la trajectoire

$$e^{As} = C.\frac{d^2y}{dx^2} \quad \ldots\ldots \quad (3).$$

Pour déterminer la constante C, il faut remonter aux circonstances initiales du mouvement : mettons $-gdt^2$ pour d^2y, nous aurons $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2.e^{As} = -Cg$: or $\frac{dx}{dt}$ est la vîtesse du mobile dans le sens des x, au tems t : soit U la vîtesse imprimée, θ l'angle que sa direction fait avec l'horison ; nous avons donc en même tems $t = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $s = 0$, et $\frac{dx}{dt} = U\cos\theta$; donc $U^2.\cos^2\theta = -Cg$. On peut aussi mettre pour U^2, sa valeur $2gh$, h étant la hauteur due à cette vîtesse (156) ; et on a $C = -2h.\cos^2\theta$. L'équation (3) devient donc

$$-e^{As} = 2h.\cos^2\theta.\frac{d^2y}{dx^2} = 2h.\cos^2\theta.\frac{dp}{dx} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

en supposant $dy = pdx$: ce qui donne $ds = dx\sqrt{(1+p^2)}$; en multipliant ces deux équations, on trouve

$$-e^{As}ds = 2h.\cos^2\theta.dp.\sqrt{(1+p^2)} \ldots\ldots (5).$$

Le premier membre a visiblement pour intégrale $-\frac{1}{A}.e^{As}$; quant au second membre, en faisant $\sqrt{(1+p^2)} = t - p$, on a $dp.\sqrt{(1+p^2)} = tdp - pdp$; et comme $p = \frac{t^2-1}{2t}$, on a $dp = \frac{t^2+1}{2t^2}.dt$. Ainsi il s'agit d'intégrer . . . , . . $\frac{t^2+1}{2t}dt - pdp$, ce qui n'a nulle difficulté; on a donc

$$\int dp.\sqrt{(1+p^2)} = \tfrac{1}{4}t^2 + \tfrac{1}{2}\log t - \tfrac{1}{2}p^2;$$

et remettant pour t sa valeur $p + \sqrt{(1+p^2)}$, on a

$$\int dp.\sqrt{(1+p^2)} = \tfrac{1}{2}\{p.\sqrt{(1+p^2)} + \log(p+\sqrt{(1+p^2)}) + C\}.$$

Ainsi l'intégrale de notre équation est

$$-e^{As} = Ah\cos^2\theta\{p.\sqrt{(1+p^2)} + \log(p+\sqrt{(1+p^2)}) + C\} \ldots (6).$$

Observons maintenant que p est la tangente de l'angle α que forme avec l'horison la direction du mouvement : ainsi on a $p = \text{tang}\,\alpha$, $\sqrt{(1+p^2)} = \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$; enfin $p + \sqrt{(1+p^2)} = \text{tang}\,\alpha + \sec\alpha = \frac{\sin\alpha + 1}{\cos\alpha}$ (*). Ainsi on a

(*) On met cette valeur sous une forme plus simple, en observant que (Trig. de *Lacroix*, 26, 5°.) on a . . . . . $\frac{\sin\beta + \sin\alpha}{\sin\beta - \sin\alpha} = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}(\beta+\alpha)}{\text{tang}\,\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}$; si on fait $\beta = 100^g$, on a donc $\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha} = \frac{\text{tang}\,(50^g + \frac{1}{2}\alpha)}{\text{tang}\,(50^g - \frac{1}{2}\alpha)} = \text{tang}\,(50^g + \frac{1}{2}\alpha) \times \cot(50^g - \frac{1}{2}\alpha)$. Or $\cot(50^g - \frac{1}{2}\alpha) = \text{tang}\,(50^g + \frac{1}{2}\alpha)$; donc on a . . . . . .

$$-e^{As} = Ah\cos^2\theta\left\{\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} + \log\left(\frac{\sin\alpha+1}{\cos\alpha}\right) + C\right\},$$

On détermine la constante C en observant qu'à l'origine, on a $s=0$ et $\alpha=\theta$; ce qui donne $C = -\frac{1}{Ah.\cos^2\theta} - f$, en supposant pour abréger

$$f = \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} + \log\left(\frac{\sin\theta+1}{\cos\theta}\right).$$

Ainsi on a pour la trajectoire l'équation

$$e^{As} = 1 + Ah\cos^2\theta\left\{f - \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} - \log\left(\frac{\sin\alpha+1}{\cos\alpha}\right)\right\}, \quad (i').$$

174. Avant d'aller plus loin, il est bon d'observer que si la résistance du milieu étoit nulle, il faudroit faire $A=0$, dans les calculs précédens. En remontant jusqu'à l'équation (3), on obtient

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1}{2h.\cos^2\theta}, \quad \text{d'où} \quad \frac{dy}{dx} = D - \frac{x}{2h.\cos^2\theta};$$

Or $x=0$, donne $\frac{dy}{dx} = \text{tang}\,\theta$; donc $D = \text{tang}\,\theta$: ainsi en intégrant de nouveau, on retrouve l'équation (h') : et on déduit tous les théorèmes démontrés dans le n°. qui précède. Puisque la trajectoire dans le vide est connue, et facile à construire, et que la difficulté des calculs ne nous permet pas d'obtenir l'équation de la trajectoire en x et y,

---

$\text{tang}\,(50^g + \frac{1}{2}\alpha) = \frac{\sqrt{(1+\sin\alpha)}}{\sqrt{(1-\sin\alpha)}}$. Mais si on remplace $\cos\alpha$ par $\sqrt{(1-\sin^2\alpha)}$ dans $\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$, on a $\frac{\sqrt{(1+\sin\alpha)}}{\sqrt{(1-\sin\alpha)}}$; donc on a enfin $\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$, ou $p+\sqrt{(1+p^2)} = \text{tang}\,(50^o + \frac{1}{2}\alpha)$.

lorsqu'il y a un milieu résistant ; rapportons celle-ci à la première en les comparant ensemble. Pour cela faisons $A = 0$ dans l'équation (5) ; elle se réduit à . . . . . $-ds' = 2h.\cos^2\theta.dp.\sqrt{(1+p^2)}$; en intégrant on obtient par le même calcul que précédemment

$$-s' = h\cos^2\theta\left\{\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} + \log\left(\frac{\sin\alpha+1}{\cos\alpha}\right) + E\right\}.$$

On doit bien distinguer entr'eux les arcs s et s' ; s est un arc de la trajectoire cherchée, s' est un arc de parabole : s et s' commencent d'ailleurs à l'origine des coordonnées, et sont terminés aux points de leurs courbes respectives, où les tangentes font avec l'axe des x le même angle α ; ces arcs ne sont d'ailleurs point décrits dans le même tems.

Comme $s' = 0$, donne $\alpha = \theta$, on trouve $E = -f$; ainsi on a

$$s' = h\cos^2\theta\left\{f - \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} - \log\left(\frac{\sin\alpha+1}{\cos\alpha}\right)\right\}.$$

Mettant dans l'équation (i') pour s' la valeur que nous venons d'obtenir, on parvient à cette relation remarquable entre les arcs s et s'

$$e^{As} = 1 + As', \text{ ou } As = \log(1+As') \ldots\ (k').$$

175. Cette relation est très-propre à faire connoître certaines particularités de la forme de la trajectoire cherchée : elle fait voir que s' croît en même tems que s, mais d'une manière bien plus rapide. Or on sait que plus le point qui Fig. 99. termine l'arc de parabole est éloigné de son sommet, et plus la tangente à l'extrémité de cet arc approche d'être parallèle à son axe : il en résulte que la tangente menée à l'extrémité de l'arc s devient d'autant plus voisine de la verticale que s est plus grand ; alors p est très-près de l'infini : ainsi dans l'équation (5) on peut négliger 1 devant

p^2, pour les points de la branche descendante Es, qui sont éloignés du sommet E. On a donc $-e^{As}\,ds = 2h.\cos^2\theta.p\,dp$; dont l'intégrale est $-e^{As} = Ah\cos^2\theta\,(p^2 + C)$: enfin à cause de l'équation (4), on a

$$\frac{dp}{dx} = \tfrac{1}{2}A(p^2 + C), \text{ d'où } dx = \frac{2}{A}.\frac{dp}{p^2 + C}.$$

Sans nous arrêter à la valeur de la constante C, qui peut être positive ou négative, il est facile de reconnoître que dans ces deux cas, l'intégrale de la valeur précédente donne x fini quand p est infini : ainsi *la branche descendante* EF *a une asymptote verticale*.

Si on fait s et s' négatifs dans la formule (k'), elle devient $-As = \log(1 - As')$: les arcs s et s' sont pris de A vers N et N' sur les courbes EAN, DAN' continuées en-deçà du point A. L'équation précédente donne s infini lorsque $s' = \frac{1}{A}$; ce qui fait voir que si on prend sur la parabole DAN', un arc AN' numériquement égal à $\frac{1}{A}$, la tangente $N'V'$ au point N', est parallèle à celle qu'on mèneroit à l'infini sur la branche AN; ainsi la trajectoire a une autre asymptote NV parallèle à $N'V'$: ce qui fait voir que cette courbe est formée de deux branches dissemblables.

176. Quoique l'équation (h') ne soit pas en x et y, elle n'est pas moins propre à décrire et calculer les parties de la trajectoire : car si on regarde les petits arcs Ab, bc, cd, ... comme des lignes droites, leurs inclinaisons mutuelles seront très-petites. On peut, par exemple, concevoir les longueurs de ces arcs telles que les angles qu'ils forment décroissent de degré en degré. Pour chacun de ces arcs la

valeur de α sera déterminée d'avance, et la formule (i') servira à déterminer la longueur correspondante de cet arc. Dans le triangle *cof*, on connoîtra donc l'angle *c*, et l'hypothénuse *co*; ainsi on pourra en calculer la base *cf* et la hauteur *fo*. En opérant de même sur chaque petit arc, et réunissant ensuite les bases entr'elles, ajoutant pareillement les hauteurs; on aura l'abscisse, l'ordonnée et la longueur de l'arc qui répondent à une valeur donnée de α : il faudra opérer séparément sur les deux branches, et prendre toutes les valeurs intermédiaires de degré en degré, depuis $\alpha = \theta$ jusqu'à $\alpha = 0$ pour la branche ascendante; et depuis $\alpha = 0$ jusqu'à α égal à la valeur négative qui répond à un point déterminé de la branche descendante. En faisant $\alpha = 0$, on auroit la longueur entière de la branche ascendante.

Ainsi on pourra construire des tables pour toutes les portées et les inclinaisons. Le calcul de chaque trajectoire n'est d'ailleurs pas aussi long qu'il le paroît d'abord; car, 1°. *f* est constant dans toute l'étendue de la même courbe; 2°. la quantité $p.\sqrt{(1+p^2)} + \log(p+\sqrt{(1+p^2)})$, calculée de degré en degré, servira pour toutes les trajectoires; 3°. lorsqu'on rend α négatif pour calculer la branche descendante, cette dernière valeur change de signe, mais elle conserve la même grandeur : cela est évident pour le premier terme, qui change de signe avec p: quant au second, il devient $\log(-p+\sqrt{(1+p^2)})$; or en multipliant et divisant la quantité $-p+\sqrt{(1+p^2)}$ par $p+\sqrt{(1+p^2)}$, on obtient $\log\left(\frac{1}{p+\sqrt{(1+p^2)}}\right)$, qui équivaut à $-\log(p+\sqrt{(1+p^2)})$; 4°. le calcul de la quantité $p.\sqrt{(1+p^2)} + \log(p+\sqrt{(1+p^2)})$ est d'ailleurs facile à effectuer, puisqu'elle est . . . . . ;

$= \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} + \log.\text{tang}\,(50^\circ + \frac{1}{2}\alpha)$; 5°. enfin vers le sommet de la courbe les arcs devant être fort petits, afin de pouvoir supposer chacun d'eux plus grand, on pourra employer, au lieu des cordes, les arcs de cercles osculateurs. Ce n'est pas ici le lieu de nous étendre sur cette matière, qu'on trouvera suffisamment détaillée dans le XIe cahier du Journal de l'Ecole Polytechnique, par le cit. *Moreau*.

177. L'équation (i') ne donne point la relation entre x et y, et il est pourtant utile d'obtenir cette relation, au moins par approximation. Pour cela, reprenons l'équation (6), dans laquelle, en faisant $s = 0$ et $p = \text{tang}\,\theta$, on a trouvé la constante $C = -\frac{1}{Ah\cos^2\theta} - f$. En substituant pour e^{As} sa valeur tirée de l'équation (4), on obtient

$$\frac{dp}{dx} = \frac{-1}{2h\cos^2\theta} + \tfrac{1}{2}A\left\{p\sqrt{(1+p^2)} + \log(p+\sqrt{(1+p^2)}) - f\right\}$$

Pour exécuter une nouvelle intégration, on supposera que $p = \text{tang}\,\theta + A'x + B'x^2 + \text{etc.}$, A', B',... étant des coefficiens indéterminés : on en tirera aisément la valeur de $\frac{dp}{dx}$; de sorte qu'en substituant dans l'équation précédente, on aura une équation identique, d'où on déduira les valeurs de A', B',..... (Voyez le Cours de Calcul intégral de *Garnier*, n°. 25.), et on a

$$p = \text{tang}\,\theta - \frac{x}{2h.\cos^2\theta} - \frac{Ax^2}{4h.\cos^3\theta} - \text{etc.} = \frac{dy}{dx} ;$$

et en intégrant de nouveau on obtient enfin

$$y = x \cdot \tang \theta - \frac{x^2}{4} \cdot \frac{1}{h \cos^2 \theta} - \frac{x^3}{3.4} \cdot \frac{A}{h \cdot \cos^3 \theta}$$
$$- \frac{x^4}{2.3.4} \cdot \left(\frac{A^2}{2h \cdot \cos^4 \theta} - \frac{A \sin \theta}{4h^2 \cdot \cos^4 \theta} \right) + \text{etc.}$$

Cette formule est assez convergente lorsque θ est fort petit, et que la vîtesse initiale n'est pas très-considérable, comme lorsqu'elle n'excède pas 70 mètres par seconde : ainsi on peut l'employer avec avantage lorsqu'il s'agit du tir à *ricochet*. Consultez à cet égard un fort beau Mémoire de *Borda*, Acad. des Sciences, 1769.

Lorsque la résistance est nulle, on a $A = 0$, et on retrouve la formule (h').

III. *De la Gravitation universelle.*

178. Les élémens de l'astronomie moderne ont pour fondement le système de Copernic. On sait que la terre n'est point une surface plane sur laquelle la voûte du ciel repose; la terre, semblable aux autres planètes, est à-peu-près sphérique, et est animée d'un double mouvement : l'un par lequel elle fait chaque jour un tour entier sur son axe, et l'autre qui l'emporte dans l'espace et lui fait décrire chaque année autour du soleil une orbite nommée *Ecliptique*. Ce n'est point ici le lieu d'expliquer ces phénomènes : on peut consulter l'*Exposition du système du monde* par LAPLACE, et l'*Astronomie* de BAILLY. Ces deux ouvrages sont des modèles d'éloquence et de profondeur qu'on ne peut négliger de lire, ni se lasser de méditer.

179. Les lois du mouvement de notre globe sont les plus intéressantes à observer, puisque sans leur connoissance préalable il est impossible de rien connoître de certain sur sa position absolue dans l'espace et celle des autres

astres. Aussi le mouvement apparent du soleil fut-il celui qui attira d'abord l'attention des observateurs : voici comment on put trouver la nature de la courbe qu'il sembloit décrire chaque année.

Les intervalles qui séparent les équinoxes des solstices ne sont pas égaux : il s'écoule environ 7 jours de plus de l'équinoxe du printems à celui d'automne que de ce dernier équinoxe à celui du printems : le mouvement propre du soleil n'est donc pas uniforme. Des observations précises et multipliées ont fait connoître qu'il est plus rapide dans un point de l'orbite solaire, situé vers le solstice d'hiver, et qu'il est plus lent dans le point opposé de l'orbite, vers le solstice d'été. Le soleil paroît décrire par jour 1°,1327 dans le premier point, et seulement 1°0591 dans le second; ainsi pendant le cours de l'année, son mouvement journalier varie en plus et en moins, de 336 dix millièmes de sa valeur moyenne.

Pour avoir la loi de cette variation, et généralement celle de toutes les inégalités périodiques, on peut considérer que les sinus et cosinus des angles redevenant les mêmes à chaque circonférence dont ces angles augmentent, ils sont propres à représenter ces inégalités. En exprimant donc de cette manière toutes les inégalités des mouvemens célestes, il n'y a de difficulté qu'à démêler ces inégalités entr'elles, et à déterminer les angles dont elles dépendent. On trouve ainsi que la variation de la vîtesse angulaire du soleil est à fort peu près proportionnelle au cosinus de la moyenne distance angulaire de cet astre, au point de l'orbite où cette vîtesse est la plus grande.

Il est naturel de penser que la distance du soleil à la terre est variable comme sa vîtesse angulaire; c'est ce que prouvent les mesures de son diamètre apparent. Il augmente et diminue en même tems et suivant la même loi

que cette vîtesse ; mais dans un rapport deux fois moindre. Lorsque la vîtesse est la plus grande, ce diamètre est de 6035″,7 ; on ne l'observe que de 5836″,3 lorsque cette vîtesse est la plus petite ; ainsi sa grandeur moyenne est de 5936″. Il doit être diminué de quelques secondes pour le dépouiller de l'effet de l'irradiation qui dilate un peu les diamètres apparens des objets.

180. La distance du soleil à la terre étant réciproque à son diamètre apparent, son accroissement suit la même loi que la diminution de ce diamètre. Mais si la vîtesse réelle du soleil dans son orbite étoit constante, sa vîtesse apparente diminueroit dans le même rapport que son diamètre apparent ; et comme elle diminue dans un rapport deux fois plus grand, il y a donc un ralentissement réel dans le mouvement du soleil lorsqu'il s'éloigne de la terre. Toutes les mesures du diamètre apparent du soleil, comparées aux observations de son mouvement journalier, font voir que la valeur angulaire de l'arc qu'il décrit chaque jour diminue comme le quarré de la distance augmente ; en sorte que le produit de ce quarré, par l'arc que décrit le point situé à l'unité de distance de la terre, est à fort peu près constant.

Imaginons un *rayon vecteur* mené par les centres du soleil et de la terre : ce rayon décrit chaque jour une aire égale ; car cette aire peut être regardée comme égale à un secteur de cercle qui a pour base l'arc décrit et pour rayon la distance entre ces deux centres. Or cette aire est la moitié du produit du rayon par l'arc, et cet arc est lui-même égal au produit du rayon par l'arc décrit par le point qui est à l'unité de distance : ainsi l'aire tracée dans un jour par ce rayon autour de la terre, est la moitié du produit du quarré de ce rayon par l'arc qui mesure l'espace décrit dans ce jour par le centre du soleil : ainsi cette aire est cons-

tante, et l'aire entière tracée par le rayon vecteur à partir d'un rayon fixe croît comme le nombre des jours écoulés depuis l'époque où le soleil étoit sur ce rayon. De là résulte cette loi remarquable du mouvement du soleil, savoir : que *les aires décrites par son rayon vecteur, sont proportionnelles aux tems.*

Si d'après les données précédentes, on marque, de jour en jour, la position et la longueur du rayon vecteur de l'orbe solaire, et que l'on fasse passer une courbe par les extrémités de tous ces rayons, on voit que cette courbe n'est pas exactement circulaire, mais qu'elle est un peu allongée dans le sens de la droite qui, passant par le centre de la terre, joint les points de la plus grande et de la plus petite distance du soleil. La ressemblance de cette courbe avec l'ellipse, ayant donné lieu de les comparer, on a reconnu leur identité, d'où on a conclu que l'*orbe solaire est une ellipse dont le centre de la terre occupe un des foyers.* Cette ellipse est d'ailleurs peu différente d'un cercle, car son excentricité est évidemment l'excès de la plus grande sur la moyenne distance du soleil à la terre, excès qui est les 178 millièmes de cette distance.

Dans tout ce qui vient d'être dit, nous avons regardé le soleil comme mobile et la terre comme fixe : mais le contraire ayant lieu, il faut visiblement placer le soleil au foyer de l'ellipse et la terre à sa circonférence, le mouvement apparent sera le même ; et pour avoir la position de la terre vue du centre du soleil, il suffira d'augmenter de deux angles droits la position de cet astre. Pareillement aussi les aires proportionnelles aux tems seront décrites par le mouvement de la terre et non par celui du soleil.

181. La figure de l'orbe terrestre, étant ainsi connue ; voyons comment on est parvenu à déterminer celle des orbes des autres planètes. Prenons pour exemple la planète

Mars qui, par la grande excentricité de son orbe, et par sa proximité de la terre, est très-propre à nous faire découvrir les lois des mouvemens planétaires.

Le mouvement de Mars autour du soleil et son orbe seroient connus, si l'on avoit pour un instant quelconque, l'angle que fait son rayon vecteur avec une droite invariable passant par le centre du soleil, et la longueur de ce rayon. Pour simplifier ce problême, on choisit les positions de Mars, dans lesquelles l'une de ces quantités se montre séparément, et c'est ce qui a lieu à fort peu près, dans les *oppositions* (*), où l'on voit cette planète répondre au même point de l'écliptique, auquel on la rapporteroit du centre du soleil. La différence des mouvemens de Mars et de la terre fait correspondre la planète à divers points du ciel, dans ses oppositions successives; en comparant donc entr'elles un grand nombre d'oppositions observées, on pourra découvrir la loi qui existe entre le tems, et le mouvement angulaire de Mars autour du soleil, mouvement que l'on nomme *héliocentrique*. L'analyse offre pour cet objet, diverses méthodes qui se simplifient dans le cas présent, par la considération que les principales inégalités de Mars, redevenant les mêmes à chacune de ses révolutions sydérales; leur ensemble peut être exprimé par une série fort convergente de sinus d'angles multiples de son moyen mouvement; série dont il est facile de déterminer les coefficiens, au moyen de quelques observations choisies.

(*) On nomme ainsi l'état d'une planète qui est placée, par rapport à la terre, du côté opposé au soleil, de manière que ces trois astres soient en ligne droite, et que la terre soit entre les deux autres; dans les conjonctions, au contraire, le soleil et la planète sont d'un même côté, par rapport à la terre.

On aura ensuite la loi du rayon vecteur de Mars, en comparant les observations de cette planète vers les quadratures, ou lorsque étant à-peu-près à cent degrés, du soleil, ce rayon se présente sous le plus grand angle. Dans le triangle formé par les droites qui joignent les centres de la terre, du soleil, et de Mars, l'observation donne directement l'angle à la terre; la loi du mouvement héliocentrique de Mars donne l'angle au soleil, et l'on en conclut le rayon vecteur de Mars, en parties de celui de la terre, qui lui-même est donné en parties de la distance moyenne de la terre au soleil. La comparaison d'un grand nombre de rayons vecteurs ainsi déterminés, fera connoître la loi de leurs variations correspondantes aux angles qu'ils forment avec une droite invariable, et l'on pourra tracer la figure de l'orbite.

Ce fut par une méthode à-peu-près semblable, que Képler reconnut l'alongement et l'excentricité de l'orbe de Mars; il eut l'heureuse idée de comparer sa figure avec celle de l'ellipse, en plaçant le soleil à l'un des foyers; et les nombreuses observations de Tycho, exactement représentées dans l'hypothèse d'un orbe elliptique, ne lui laissèrent aucun doute sur la vérité de cette hypothèse.

Fig. 96. On nomme *périhélie*, l'extrémité F du grand axe, la plus voisine du soleil A; et *aphélie*, l'extrémité H la plus éloignée. C'est au périhélie, que la vitesse angulaire de Mars autour du soleil est la plus grande; elle diminue ensuite à mesure que le rayon vecteur augmente, et elle est la plus petite à l'aphélie. En comparant cette vitesse, aux puissances du rayon vecteur, Kepler trouva qu'elle est proportionnelle à son quarré, ensorte que le produit du mouvement journalier héliocentrique de Mars, par le quarré de son rayon vecteur, est toujours le même. Ce produit

est le double du petit secteur que ce rayon trace, chaque jour, autour du soleil; l'aire qu'il décrit en partant d'une ligne invariable passant par le centre du soleil, croît donc comme le nombre des jours écoulés depuis l'époque où la planète étoit sur cette ligne; ce que Kepler énonça, en établissant que les aires décrites par le rayon vecteur de Mars, sont proportionnelles aux tems.

Ces lois du mouvement de Mars sont les mêmes que celles du mouvement apparent du soleil, que nous avons développées; ainsi elles ont également lieu pour la terre. Il étoit naturel de les étendre aux autres planètes.

Ces lois suffisent pour déterminer le mouvement des planètes autour du soleil; mais il est nécessaire de connoître pour chacune d'elles, sept quantités que l'on nomme *élémens du mouvement elliptique*. Cinq de ces élémens, relatifs au mouvement dans l'ellipse, sont 1°. la durée de la révolution sydérale; 2°. le demi grand axe de l'orbite, ou la moyenne distance de la planète au soleil; 3°. l'excentricité; 4°. la longitude moyenne de la planète à une époque donnée; 5°. la longitude du périhélie à la même époque. Les deux autres élémens se rapportent à la position de l'orbite, et sont, 1°. la longitude à une époque donnée, des nœuds de l'orbite, ou de ses points d'intersection avec un plan que l'on suppose ordinairement être celui de l'écliptique; 2°. l'inclinaison de l'orbite.

L'expérience nous montre que les durées des révolutions des planètes, croissent avec leurs moyennes distances au soleil; cela fit soupçonner à Kepler qu'elles sont liées à ces distances, par un rapport qu'il se proposa de découvrir. Après un grand nombre de tentatives continuées pendant dix-sept ans, il reconnut enfin, que *les quarrés des tems des révolutions des planètes, sont entre*

eux comme les cubes des grands axes de leurs orbites.

182. Telles sont les lois du mouvement des planètes, lois fondamentales qui en donnant une face nouvelle à l'astronomie, ont conduit à la découverte de la pesanteur universelle, que nous nous proposons ici de démontrer.

On les connoît sous la dénomination de lois de Képler, du nom du savant célèbre qui les a découvertes : voici leur énoncé.

1°. *Les aires décrites autour du centre du soleil, par les rayons vecteurs des planètes, sont proportionnelles aux tems employés à les décrire.*

2°. *Les orbes planétaires sont des ellipses dont le centre du soleil occupe un des foyers.*

3°. *Les quarrés des tems des révolutions des planètes, sont entr'eux comme les cubes des grands axes de leurs orbites.*

Nous regarderons donc ici ces lois comme des vérités dues à l'expérience : Képler les a obtenues par une longue suite d'observations ; on les a depuis confirmées, et il est impossible maintenant d'élever le plus léger doute à cet égard. Nous ne considérerons ici que le soleil et une planète, telle que la Terre, par exemple.

Fig. 96. 183. Soient x et y les coordonnées rectangles AP et PM du lieu d'une planète M dans son orbite DM, l'origine A étant au centre du soleil : nommons de plus X et Y les forces dont cette planète est animée dans son mouvement autour du soleil, parallèlement aux axes des x et des y : les équations (c'), sont $d^2x = Xdt^2$, $d^2y = Ydt^2$; dt est ici constant. Si on retranche les produits respectifs de ces deux équations, par y et par x, on a . . . . . $x.d^2y - y.d^2x = (xY - yX)dt^2$. Le premier membre

est la différentielle de $x.dy - y.dx$: or on a vu (170) que $\int(xdy - ydx)$ est le double de l'aire que décrit le rayon vecteur AM de la planète, pendant le tems t, autour du soleil : d'après la première loi de Képler, cette aire étant proportionnelle au tems, on a $\int(xdy - ydx) = ct$; d'où on tire

$$xdy - ydx = cdt, \text{ et } Yx - Xy = 0.$$

Il suit de là (27, 41) que les forces X et Y ont leur résultante dirigée vers le centre du soleil, qui est à l'origine des coordonnées. D'ailleurs la courbe décrite par la planète étant concave vers le soleil, il est visible que la force qui fait décrire cette courbe tend vers ce point. La loi des aires proportionnelles aux tems employés à les décrire, nous conduit donc à ce premier résultat remarquable, *la force qui sollicite chaque planète est dirigée vers le centre du soleil.* Il est aisé de rapprocher cette théorie, de ce qu'on a dit (170) sur le principe des aires.

184. Déterminons la loi suivant laquelle cette force agit à différentes distances de cet astre : il est clair que les planètes, s'approchant et s'éloignant alternativement du soleil à chaque révolution, la nature du mouvement elliptique doit nous conduire à cette loi. Reprenons dans cette vue les équations $d^2x = Xdt^2$, $d^2y = Ydt^2$, en ajoutant les produits respectifs de ces équations par dx et dy, on a $dx.d^2x + dy.d^2y = (Xdx + Ydy)\,dt^2$; et comme le premier membre est la différentielle de $\frac{1}{2}(dx^2 + dy^2)$, en intégrant, et mettant pour dt sa valeur $\frac{xdy - ydx}{c}$, donnée par la loi de la proportionnalité des aires décrites aux tems, on a

$$\frac{c^2(dx^2 + dy^2)}{(xdy - ydx)^2} = 2\int(Xdx + Ydy) \ldots\ (1).$$

La constante arbitraire est comprise dans le signe f. Transformons, pour plus de facilité, les variables x et y, en coordonnées polaires : soit r le rayon vecteur AM, mené
Fig. 98. par les centres du soleil et de la planète ; soit aussi u l'angle MAF qu'il forme avec l'axe des x. Le triangle MAP donne

$$x = -r.\cos u,\ y = r.\sin u,\ r = \sqrt{(x^2+y^2)};$$

d'où on tire

$$dx^2 + dy^2 = r^2du^2 + dr^2,\ xdy - ydx = -r^2du.$$

Soit φ la force qui agit sur la planète : comme cette force a X et Y pour ses composantes rectangulaires, et qu'elle est dirigée vers l'origine des coordonnées, on a $X = -\varphi.\cos u$, $Y = \varphi.\sin u$, $\varphi^2 = X^2 + Y^2$: ainsi $Xdx + Ydy = \varphi dr$, ce qui change l'équation (1) en

$$\frac{c^2(r^2du^2 + dr^2)}{r^4.du^2} = 2f(\varphi dr).$$

En tirant de cette équation la valeur de du, on aura au moyen des quadratures, et lorsque φ sera connue en fonction de r, une relation entre u et r qui sera l'équation de la trajectoire. Mais si la trajectoire est donnée, la force φ étant inconnue, en différentiant l'équation précédente on a pour déterminer φ, l'expression

$$\varphi = \frac{1}{2}\frac{c^2}{dr}\,d.\left(\frac{dr}{r^2du}\right)^2 - \frac{c^2}{r^3} \ldots\ (2).$$

Cela posé, on sait que la longueur du rayon vecteur mené du foyer à l'un des points d'une ellipse est . . . . . $r = \frac{a^2 - kx'}{a}$, a étant le demi grand axe, l'origine des x' étant au centre o, et k désignant l'*Excentricité*, c'est-à-dire,

la distance OA du centre au foyer. (Voyez l'Appl. de l'alg. à la géom. de *Lacroix*, n°. 112, et le Traité des courbes du second degré, de *Biot*, 68). Soit u l'angle FAM, formé par le grand axe et le rayon vecteur AM, du côté de celui des sommets de l'ellipse qui est le plus voisin du foyer A, on a visiblement $x' = k + r\cos u$, donc Fig 96.

$$r = \frac{a^2 - k^2}{a + k\cos u}, \text{ ou } r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos u}$$

en supposant, pour abréger, $e = \frac{k}{a}$. Si on veut compter les angles à partir d'une droite quelconque AC, passant par le foyer A, et formant avec le grand axe l'angle $FAC = \alpha$, il faut changer ici u en $\iota + \alpha$, ι désignant l'angle variable CAM formé par cette droite AC, et le rayon vecteur. On aura donc

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos(\iota + \alpha)} \quad \ldots\ldots \quad (3);$$

et comme $d\iota = du$, on trouve en différentiant

$$\frac{dr}{r^2 du} = \frac{e.\sin(\iota + \alpha)}{a(1-e^2)}.$$

Le quarré de cette dernière équation devient, en substituant pour $\sin^2(\iota + \alpha)$ sa valeur $\frac{r(1-e^2)(2a-r) - a^2(1-e^2)^2}{r^2 e^2}$ tirée de la première,

$$\left(\frac{dr}{r^2 du}\right)^2 = \frac{2}{ar(1-e^2)} - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2(1-e^2)}.$$

La différentielle du second membre est . . . . . $-\frac{2dr}{a(1-e^2)r^2} + \frac{2dr}{r^3}$; l'équation (2) devient donc

$$\varphi = \frac{-c^2}{a(1-e^2)} \times \frac{1}{r^2} \quad \ldots\ldots \quad (l').$$

De ce que les orbites des planètes sont elliptiques, on conclut donc que la force qui les anime est réciproque au quarré de la distance du centre de ces astres à celui du soleil.

On voit de plus que si la force φ est réciproque au quarré de la distance r, ou exprimée par $\frac{h}{r^2}$, h étant un coefficient constant, l'équation (5) satisfera à l'équation différentielle (2) entre r et u, en y changeant φ en $\frac{h}{r^2}$. On a alors $h = -\frac{c^2}{a(1-e^2)}$, ce qui forme une équation de condition entre les deux arbitraires a et e de l'équation (5) qui est celle de l'ellipse, ou plutôt des sections coniques. Les trois arbitraires a, e et α de cette équation, se réduisent donc à deux seules arbitraires distinctes; et comme l'équation différentielle entre r et u n'est que du deuxième ordre, l'équation finie aux sections coniques en est l'intégrale complette.

Il suit de là que si la courbe décrite est une section conique, la force est en raison inverse du quarré des distances; et réciproquement, que si la force suit la raison inverse du quarré des distances, la courbe décrite est une section conique.

185. L'intensité de la force φ, relativement à chaque planète, dépend du coefficient h; les lois de Képler donnent encore le moyen de le déterminer. En effet, si on nomme T le tems de la révolution d'une planète, l'aire que son rayon vecteur décrit pendant ce tems sera la surface même de l'ellipse planétaire; or cette surface étant à celle du cercle décrit sur le même axe, dans le rapport des axes, elle est $= \pi a^2 . \sqrt{(1-e^2)}$; (Calcul intégral élém. de *Lacroix*, 218) mais on a, d'après la première

loi de Képler $\frac{\frac{1}{2}ct}{\pi a^2\sqrt{(1-e^2)}} = \frac{t}{T}$; or la troisième loi de Képler donne $T^2 = m^2a^3$, m étant un coefficient constant pour toutes les planètes, on a donc . . . . . $\frac{1}{2}cm = \pi\sqrt{\{a(1-e^2)\}}$, d'où

$$h = \frac{-c^2}{a(1-e^2)} = -\frac{4\pi^2}{m^2},$$

et par conséquent

$$\varphi = -\frac{4\pi^2}{m^2} \times \frac{1}{r^2} \ldots\ldots\ldots (m').$$

Le coefficient $\frac{4\pi^2}{m^2}$ étant le même pour toutes les planètes, il en résulte que pour chacun de ces corps la force φ est réciproque au quarré des distances au centre du soleil, et qu'elle ne varie d'un corps à l'autre qu'à raison de ces distances; d'où il suit qu'elle est la même pour tous ces corps supposés à égale distance du soleil : ainsi les planètes, abandonnées à leur gravité vers cet astre, tomberoient dans ce cas en tems égal, d'une égale hauteur, en sorte que *leur poids seroit proportionnel à leur masse.*

186. Nous voilà donc conduits par les belles lois de Képler, à regarder le centre du soleil comme le foyer d'une force attractive qui s'étend à l'infini dans tous les sens; en décroissant en raison du quarré des distances. La loi de la proportionnalité des aires décrites par les rayons vecteurs, aux tems employés à les décrire, nous montre que la force principale qui sollicite les planètes est constamment dirigée vers le centre du soleil. L'ellipticité des orbes planétaires prouve que pour chaque planète cette force est réciproque au quarré de sa distance au soleil; enfin, de la proportionnalité des quarrés des tems des ré-

volutions aux cubes des grands axes des orbites, il résulte que cette force est la même pour toutes les planètes placées à égales distances du soleil : en sorte que dans ce cas ces corps se précipiteroient vers lui avec la même vîtesse; d'où on conclut que la gravitation est proportionnelle à la masse.

187. L'équation (3) appartenant aussi à la parabole, en prenant $e = 1$, et $a = \infty$, il résulte que la même loi a lieu également pour les comètes, ces astres décrivant des orbes à très-peu-près paraboliques. Les lois de Képler s'appliquent également aux *satellites* des planètes, qui ont autour d'elles un mouvement relatif à-peu-près comme si elles étoient immobiles; ces satellites gravitent donc suivant les mêmes lois. Le soleil et les planètes qui ont des satellites, sont par conséquent doués d'une force attractive qui, en décroissant à l'infini réciproquement au quarré des distances, embrasse dans sa sphère d'activité tous les corps. L'analogie nous porte à penser qu'une pareille force réside généralement dans toutes les planètes et dans les comètes : mais on peut s'en assurer directement de cette manière. C'est une loi constante de la nature, qu'un corps ne peut agir sur un autre sans en éprouver une réaction égale et contraire; ainsi les planètes et les comètes étant attirées vers le soleil, elles doivent attirer cet astre suivant la même loi. Les satellites attirent par la même raison leurs planètes; cette propriété attractive est donc commune aux planètes, aux comètes et aux satellites, et par conséquent on peut regarder la gravitation des corps célestes les uns vers les autres comme une propriété générale de cet univers.

Nous venons de voir qu'elle suit la raison inverse du quarré des distances; à la vérité cette raison est donnée

par les lois du mouvement elliptique, auxquelles les mouvemens célestes ne sont pas rigoureusement assujettis; mais ces perturbations résultent de l'action même des forces attractives des planètes et des comètes les unes sur les autres. Consultez à cet égard le chap. Ier. du livre II de la Mécanique céleste, et l'exposition du système du monde, ouvrages du cit. LAPLACE, dont nous ne saurions trop recommander la lecture, et dont nous avons extrait tout ce que nous avons dit dans cet article.

La même loi s'observe sur la terre : on s'est assuré, par des expériences très-précises faites au moyen du pendule; que sans la résistance de l'air, tous les corps se précipiteroient vers son centre avec une égale vîtesse : les corps terrestres pèsent donc sur la terre en raison de leurs masses, ainsi que les planètes pèsent vers le soleil, et les satellites vers leurs planètes. Cette conformité de la nature avec elle-même sur la terre et dans l'immensité des cieux, nous montre, de la manière la plus frappante, que la pesanteur observée ici bas n'est qu'un cas particulier d'une loi générale répandue dans l'univers. Les phénomènes célestes, comparés aux lois du mouvement, nous conduisent donc à ce grand principe de la nature, savoir : que *les molécules de la matière s'attirent mutuellement en raison des masses, et réciproquement au quarré des distances.*

On auroit pu poser ce principe comme vrai; et en employant la même analyse, on auroit remonté aux lois de Képler : il sera facile de faire ce renversement. Nous avons suivi une marche différente, parce qu'elle est plus naturelle, et sert à démontrer sans réplique la gravitation, en déduisant cette propriété de la matière, des observations les plus constantes.

IV. *Mouvement d'un corps pesant dans un canal.*

188. Nous avons supposé jusqu'ici que le mobile obéissoit librement à l'action des puissances qui le sollicitoient ; supposons qu'il se trouve assujetti à parcourir une ligne donnée (comme il arriveroit s'il étoit retenu dans un canal), et animé par des forces connues, il convient d'examiner toutes les circonstances du mouvement. Mais pour rendre tout ce que nous avons à dire plus facile à saisir, nous allons d'abord traiter le cas où le mobile n'est soumis qu'à la gravité ; ce cas, le plus commun dans la nature, mérite un examen particulier à cause de son importance et de sa simplicité.

Fig. 100. 189. Supposons d'abord qu'un corps pesant est placé sur un *Plan incliné AB* ; soit *M* le lieu du mobile au bout du tems t ; et $BM = e$ l'espace qu'il a parcouru : enfin soit v sa vîtesse en *M*. La gravité g imprime pendant le tems dt, dans la direction verticale *MD*, la vîtesse élémentaire gdt ; décomposons cette impulsion en deux autres, l'une perpendiculaire au plan et détruite par sa réaction, l'autre dirigée dans le sens du plan : il est clair que cette dernière aura pour direction la ligne *AB* de plus grande pente sur le plan, que cette ligne sera celle que décrira le corps et suivant laquelle la vîtesse v aura lieu. Nommons ε l'angle *BAC* que forme le plan incliné avec l'horison : la composante de l'impulsion gdt dans le sens *BM* étant $gdt \times \cos BMP = gdt.\sin\varepsilon$, on aura pour l'accroissement de vîtesse le long du plan $dv = g\sin\varepsilon.dt$. En intégrant on obtient

$$v = C + g\sin\varepsilon.t,\quad e = C' + Ct + \tfrac{1}{2}g\sin\varepsilon.t^2 \ldots . (n').$$

Il résulte de là que le point mobile est sollicité par la

force accélératrice constante $g \sin \varepsilon$ dans le sens du plan; qu'on peut regarder ce plan comme vertical, pourvu que cette force remplace la gravité; enfin que *le mouvement est uniformément varié*. C est la vîtesse initiale du corps, et C' est sa distance à l'origine des e lorsque $t = 0$. Si on prend le point B de départ pour origine des e, et si on n'imprime aucune impulsion initiale, l'équation du mouvement est donc

$$v = g \sin \varepsilon . t, \quad e = \tfrac{1}{2} g \sin \varepsilon . t^2,$$

la pression du corps sur le plan est visiblement $g \cos \varepsilon$.

190. Comparons maintenant le mouvement sur le plan incliné, à celui qui a lieu quand le corps est libre. Comme il descend le long de la verticale BC, on a (156, h), $e' = \frac{1}{2} g t'^2$, $v' = g t'$, et $v'^2 = 2 g e'$.

1°. Pour trouver en quel point de BC le mobile doit être parvenu, lorsque le corps M a décrit sur le plan incliné l'espace BM, il faut faire $t = t'$, et éliminer t entre les équations $e = \frac{1}{2} g \sin \varepsilon . t^2$, $e' = \frac{1}{2} g t^2$. On a donc $e = e' \sin \varepsilon$, ce qui indique que e' est l'hypothénuse d'un triangle rectangle dont e est le côté opposé à l'angle ε; ainsi en menant en M la perpendiculaire ME sur AB, on a $BE = e'$, et le point E est la réponse à la question.

Cette construction fait voir que si on mène dans un cercle $ACDB$ des cordes AC, AD,... par l'extrémité A du diamètre vertical AB, et BC, BD,... à cause des angles droits en C, D,... *toutes ces cordes seront décrites dans le même tems que le diamètre* : cette propriété s'appelle *Isochronisme*. Fig. 101.

2°. Comme on a $v'^2 = 2 g e'$, et $v^2 = 2 g \sin \varepsilon . e$, pour trouver en quels points de AB et de BC les deux mobiles ont la même vîtesse, il faut faire $v = v'$, ce qui donne $e' = e \sin \varepsilon$. Donc e est l'hypothénuse d'un triangle rec- Fig. 100.

tangle dont e' est le côté opposé à l'angle ε; ainsi en menant l'horisontale MF', on voit que $BF' = e'$, et que par conséquent lorsque les mobiles sont parvenus en M et en F', ce qui arrive à des instans différens, ils ont la même vitesse; ou, si on veut, que la vitesse du corps en M est dirigée dans le sens MB, et due à la hauteur BF'. On conclut de là que *plusieurs corps qui parcourent des plans différemment inclinés, et qui, sans impulsion primitive, partent d'un même plan horisontal, ont des vitesses égales, après avoir décrit sur leurs plans respectifs des parties de même hauteur.* Nous allons voir dans un instant que ce théorême n'est point particulier au plan incliné.

3°. Comparons les tems employés à descendre les longueurs BC et BA terminés à l'horisontale AC; soit $BC = e'$ et $BA = e$; comme $e' = \frac{1}{2} g t'^2$ et $e = \frac{1}{2} g \sin\varepsilon . t^2$, on a $\frac{e}{e'} = \frac{\sin\varepsilon . t^2}{t'^2}$. Mais le triangle ABC donne $\sin\varepsilon = \frac{e'}{e}$; donc $\frac{e}{e'} = \frac{BA}{BC} = \frac{t}{t'}$. Ainsi, quelle que soit l'inclinaison du plan, les tems sont proportionnels aux longueurs AB, BC: d'où il suit que *les tems employés à descendre le long de différens plans inclinés, sont entr'eux comme les longueurs de ces plans.*

191. Nous avons fait abstraction jusqu'ici du frottement que le corps exerce en glissant sur le plan; nous allons maintenant y avoir égard. Il est clair que la pression normale que le corps exerce sur le plan étant $g\cos\varepsilon$, le frottement est ici (133) $fg\cos\varepsilon$, force qui est dirigée en sens opposé au mouvement. Ainsi l'accroissement de vitesse qui a lieu en M quand le corps descend de B vers A, est $dv = g(\sin\varepsilon - f\cos\varepsilon)dt$, d'où on tire $v = g(\sin\varepsilon - f\cos\varepsilon)t + V$. La constante V est la valeur de v lorsque $t = 0$, c'est-

à-dire, est l'impulsion qu'on suppose avoir été communiquée au corps dans le sens BM, au commencement du tems t.

Si le corps étoit au contraire lancé de A vers B, alors la gravité et le frottement tendroient à diminuer la vîtesse imprimée V, et on auroit $dv = -g(\sin\varepsilon + f\cos\varepsilon)\,dt$, d'où $v = V - g(\sin\varepsilon + f\cos\varepsilon)t$. De sorte qu'en cumulant ces deux circonstances, on a

$$v = V - g(f\cos\varepsilon \mp \sin\varepsilon)t \ldots\ldots (o').$$

On en tire aisément pour l'espace parcouru

$$e = Vt - \tfrac{1}{2}g(f\cos\varepsilon \mp \sin\varepsilon)t^2 \ldots\ldots (p').$$

Le signe supérieur a lieu lorsque l'impulsion initiale est donnée de haut en bas; l'inférieur a lieu dans le cas contraire.

Dans ce dernier cas, on voit que $v = o$ lorsqu'on a $t = \dfrac{V}{g(\sin\varepsilon + f\cos\varepsilon)}$, en substituant dans (p'), on a pour la valeur de e correspondante, en faisant $V^2 = 2gh$ (156), $e = \dfrac{h}{\sin\varepsilon + f\cos\varepsilon}$. Il est clair qu'alors le corps ne montera le long du plan que jusqu'à un certain point, dont nous venons de déterminer la position; d'où il redescendra ensuite en partant du repos.

Si $\varepsilon = o$, le plan est horisontal, et on a pour la solution du problème des *Traînaux*

$$v = V - fgt,\quad e = Vt - \tfrac{1}{2}gft^2.$$

192. Cherchons maintenant les circonstances du mouvement d'un corps pesant qui se meut dans un canal curviligne, sans avoir égard au frottement. Supposons qu'un point matériel soit abandonné à la gravité sur l'arc Fig. 102.

de courbe BM, au point B, sans aucune impulsion, et qu'il soit parvenu en M au bout du tems t. Prenons pour axes l'horisontale AX et la verticale AY, de sorte que $AP = x$, $PM = y$, et $BM = s$: soit $BC = h$. La vitesse v que le mobile a en M dans le sens de l'élément de la courbe est $\frac{ds}{dt}$, et la gravité l'augmente de dv pendant l'instant dt : mais cette force tend à communiquer la vîtesse gdt dans le sens de MG. Imitons donc ici ce qui a été fait (189), et décomposons cette impulsion en deux autres, dirigées, l'une suivant la tangente MH, l'autre suivant la normale MN : celle-ci est détruite par la résistance de la courbe ; la première $= gdt \times \cos GMH$. Or on sait que le sinus de l'angle MTP, que forme la tangente avec l'axe des x, est $\frac{dy}{ds} = \cos GMH$; donc la composante de l'impulsion gdt dans le sens de MH, ou l'accroissement de vîtessse, est $dv = gdt \cdot \frac{dy}{ds}$; d'où $vdv = gdy$, à cause de $v = \frac{ds}{dt}$. En intégrant on a $v^2 = 2gy + C$: or $y = h$ correspond au point B auquel la vîtesse du mobile étoit nulle, ainsi $v = 0$, lorsque $y = h$; d'où $C = -2gh$, et

$$v^2 = 2g(y - h), \text{ ou } v^2 = 2g \times MI \ldots\ldots (q').$$

Il suit de là et de l'équation (h, 156) que le mobile a la même vîtesse en M, suivant la tangente, que s'il étoit tombé de la hauteur MI. Donc *lorsqu'un corps pesant descend le long d'une courbe, il a en chaque point la même vîtesse que s'il étoit tombé librement de pareille hauteur, quelle que soit la courbe décrite.* Ce résultat nous apprend que la deuxième conséquence du n°. 191 n'est qu'un cas particulier de ce dernier principe.

193. Le théorême précédent servira à faire connoître le mouvement du mobile; en effet, on tire de l'équation (q') $v = \sqrt{\{2g(y-h)\}}$; mais on a aussi $v = \frac{ds}{dt}$; donc

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\{2g(y-h)\}}, \text{ et } dt = \frac{ds}{\sqrt{\{2g(y-h)\}}} \ldots (r').$$

On tirera de l'équation donnée de la courbe la valeur de ds en fonction de y et dy; et la substituant ici, on aura, en intégrant depuis $y = h$, le tems employé à descendre de B en M. Si le mobile avoit reçu en B une impulsion, Fig. 102. ou s'il avoit déja en ce point une vîtesse, produite par un mouvement antérieur le long de l'arc KB, en désignant par b la hauteur due à cette vîtesse, on trouveroit en raisonnant de même

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{\{(2g(y-h+b)\}}}.$$

V. *Pendule simple.*

194. Lorsqu'un point matériel pesant Q est lié à un fil Fig. 103. QO, inextensible et sans pesanteur, dont l'extrémité O est fixe, on donne à ce système le nom de PENDULE SIMPLE. Pour obtenir les circonstances du mouvement, il est clair qu'il ne s'agit que d'appliquer au cercle ce qu'on vient de dire. Prenons le point le plus bas A pour origine et la verticale AO pour axe des x. Soient $AG = x$, $GM = y$; M le lieu du mobile au bout du tems t; Q le point de départ; $AD = b$, et le rayon $AO = r$. La vîtesse que le mobile a en M dans le sens de la tangente, étant due à la hauteur DG, on a $v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{(2g \times DG)}$,

mais $DG = b - x$; donc on a

$$\frac{-ds}{dt} = \sqrt{\{2g(b-x)\}}, \text{ d'où } dt = \frac{-ds}{\sqrt{\{2g(b-x)\}}}.$$

Nous nommons ici s l'arc AM, et comme cet arc décroît lorsque le tems t augmente, nous mettons ici le signe —. Cela posé pour déterminer ds en fonction de x et dx, on observe que l'équation du cercle donne

$$y^2 = 2rx - x^2, \quad ds = \frac{rdx}{y} = \frac{rdx}{\sqrt{(2rx - x^2)}}.$$

En substituant, on a donc

$$dt = \frac{-rdx}{\sqrt{\{(2rx - x^2).2g(b-x)\}}} \quad \ldots\ldots \text{ (1)}.$$

C'est de l'intégration de cette équation que dépend la connoissance du mouvement du pendule. On doit remarquer avant tout que lorsque le mobile sera arrivé en A, il aura dans le sens horisontal une vîtesse due à la hauteur AD, de sorte qu'il sera dans le même état que si, placé en A, on le tiroit du repos en lui communiquant dans le sens horisontal la vîtesse $\sqrt{\{2g \times AD\}}$. Or il est clair que cette impulsion le fera remonter au point Q', situé sur l'horisontal QD : si la chose ne sembloit pas évidente d'elle-même, il suffiroit de traiter le corps par la formule du n°. (192), et on verroit qu'il a en K la même vîtesse qu'en M, et qu'il en est de même des points Q et Q'. Ainsi le corps perd peu à peu la vîtesse qu'il a acquise, et il est en Q' dans le même état où il étoit en Q; il doit donc redescendre, et remonter ensuite. On a nommé *Oscillation* cette sorte de mouvement, qui se perpétueroit à l'infini, sans les résistances que le mobile éprouve, et dont nous faisons ici abstraction.

195. Avant d'intégrer l'équation (1) dans le cas général,

il est bon d'examiner le cas où les oscillations sont très-petites : alors x doit être négligé devant r ; ce qui donne

$$dt = \frac{-rdx}{\sqrt{\{2rx \cdot 2g(b-x)\}}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)} \times \frac{-dx}{\sqrt{(bx-x^2)}}.$$

Mais (voyez n°. 160) $\int \frac{-dx}{\sqrt{(bx-x^2)}} = \text{arc}\left(\cos = \frac{2x-b}{b}\right)$; si donc on intègre depuis $x = b$, jusqu'à $x = 0$, on a $\int \frac{-dx}{\sqrt{(bx-x^2)}} = \pi$; et on obtient pour le tems de la demi-oscillation, $t = \frac{1}{2}\pi \cdot \sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)}$, et pour le tems de l'oscillation entière

$$t = \pi \cdot \sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)} \ldots\ldots (s').$$

On observera que l'intégrale $\int \frac{-dx}{\sqrt{(bx-x^2)}}$ est aussi bien 3π, 5π, ... que π ; puisque tous ces arcs ont également -1 pour cosinus : ce qui fait voir que le mobile arrive en A, dans une infinité de tems successifs, tous séparés entr'eux par le tems $\pi \cdot \sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)}$ qui est celui de l'oscillation entière. Cela répond aux oscillations successives, ainsi qu'on l'a déja dit. On tire de l'équation (s') diverses conséquences remarquables.

1°. Comme le tems t est indépendant de b, on voit que, quelle que soit l'amplitude de l'excursion $Q'AQ$, le tems de l'oscillation est le même, pourvu qu'elle soit très-petite. Ainsi concevons différens mobiles assujettis à décrire l'arc QA, en partant du repos de divers points de cet arc, ils arriveront tous en même tems en A. On dit alors que les oscillations sont *Isochrones*. Nous reviendrons bientôt sur cette propriété (198, 1°.).

2°. Soient r et r' les longueurs de deux pendules, les tems t et t' de leurs oscillations seront $t = \pi \cdot \sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)}$, $t' = \pi \cdot \sqrt{\left(\frac{r'}{g}\right)}$: donc on a $\frac{t}{t'} = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r'}}$. Ainsi *les durées des oscillations sont entr'elles comme les racines quarrées des longueurs des pendules.*

3°. Si pendant le tems T un pendule fait N oscillations, la durée de l'une d'elles est $t = \frac{T}{N}$; et on a . . . . . $\frac{T}{N} = \pi \cdot \sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)}$, d'où $r = \frac{g}{\pi^2} \cdot \frac{T^2}{N^2}$: un autre pendule de longueur r' feroit N' oscillations dans le même tems, et on a $r' = \frac{g}{\pi^2} \cdot \frac{T^2}{N'^2}$. Il est facile d'en conclure

$$r'N'^2 = rN^2.$$

Ainsi les longueurs de deux pendules sont entr'elles en raison inverse des quarrés des nombres d'oscillations, faites dans le même tems. L'équation précédente servira à connoître l'une des quatre quantités r, N, r' et N' lorsqu'on connoîtra les trois autres.

Ainsi pour déterminer la longueur du pendule qui bat les secondes ; on en fera osciller un de longueur arbitraire, et on comptera le nombre d'oscillations qu'il fait dans un tems déterminé, tel qu'une minute. C'est ainsi que, par exemple, on verra qu'un pendule de 5 pieds de long fait 48,5 oscillations par minute. On a donc alors $r' = 5$ pieds, $N' = 48{,}5$ et $N = 60$; on en conclut que la longueur du pendule à seconde, réduit au mouvement dans le vide, est 3 pieds 8 lignes, 57 ; ou 9,94 décimètres, quand on divise le jour en 24 heures : elle est de 0,742 mètres dans la nouvelle division du jour. Mais on ne doit point oublier

que cette longueur varie dans les différens lieux de la terre, tant à cause du défaut de sphéricité, que par l'effet de la force centrifuge (210).

4°. L'équation (s') donne $g = \frac{\pi^2 r}{t^2} = \frac{\pi^2 r N^2}{T^2}$. On peut donc déterminer avec la plus grande exactitude la valeur numérique de la gravité g, à l'aide d'une expérience qui feroit connoître les grandeurs N et T pour un pendule de longueur connue r. Nous avons donné cette valeur (156, g).

196. Reprenons maintenant l'équation (1), et examinons ce qui arrive lorsque les excursions du pendule sont de grandeurs quelconques. Pour intégrer nous diviserons et multiplierons respectivement par $2rx$ les facteurs sous le radical, ce qui donne

$$t = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)} \times \int \left\{ \frac{-dx}{\sqrt{(bx-x^2)}} \times \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{x}{2r}\right)}} \right\}$$

développant $\left(1-\frac{x}{2r}\right)^{-\frac{1}{2}}$ par la formule de Newton, ce qui offre ici le seul moyen d'obtenir une suite convergente, on a

$$t = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)} \times \int \left\{ \frac{-dx}{\sqrt{(bx-x^2)}} \left[1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2r} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^2}{4r^2} + \text{etc.} \right] \right\}.$$

On observe que les termes à intégrer sont tous de la forme $\frac{-x^m dx}{\sqrt{(bx-x^2)}}$, et que de plus pour obtenir le tems de la demi-oscillation, l'intégrale doit être prise entre les limites $x = b$; et $x = 0$. Or les formules connues donnent

$$\int \frac{-x^m dx}{\sqrt{(bx-x^2)}} = \frac{x^{m-1}}{m}\cdot\sqrt{(bx-x^2)} + \tfrac{1}{2}b\cdot\frac{2m-1}{m} \times \int \frac{-x^{m-1}dx}{\sqrt{(bx-x^2)}}$$

(*Cal. intég. élém. de Lacroix*, 171) au reste on peut trouver directement cette formule en différentiant . . . $x^{m-1}.\sqrt{(bx-x^2)}$; multipliant et divisant par $\sqrt{(bx-x^2)}$ le terme $(m-1)x^{m-2}.\sqrt{(bx-x^2)}$ qui s'y trouve : enfin en réduisant et intégrant le résultat.

Le premier terme disparoît soit que $x=b$, soit que $x=0$: si donc on fait $\int\frac{-x^m dx}{\sqrt{(bx-x^2)}}=U_{(m)}$, on aura

$$U_{(m)} = \tfrac{1}{2}b.\frac{2m-1}{m}.U_{(m-1)}$$

$$U_{(m-1)} = \tfrac{1}{2}b.\frac{2m-3}{m-1}.U_{(m-2)}$$

$$U_{(m-2)} = \tfrac{1}{2}b.\frac{2m-5}{m-2}.U_{(m-3)}$$

. . . . . .

$$U_{(0)}=\int\frac{-dx}{\sqrt{(bx-x^2)}}=\text{arc}\left(\cos=\frac{2x-b}{b}\right)=\pi.$$

Multipliant ces équations entr'elles, et réduisant, on a

$$U_{(m)}=\int\frac{-x^m dx}{\sqrt{(bx-x^2)}}=(\tfrac{1}{2}b)^m.\pi.\frac{1.3.5...(2m-3)(2m-1)}{1.2.3....m}.$$

En attribuant successivement à m les valeurs 0, 1, 2, 3 . . . et substituant les résultats, on obtient

$$t=\frac{\pi}{2}.\sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)}\times\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2.\frac{b}{2r}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2.\frac{b^2}{2^2r^2}+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\frac{b^3}{2^3r^3}+\text{etc.}\right\}$$

Fig. 103. Comme b est le sinus verse de l'angle QOA, lorsque cet angle est très-petit, la formule précédente se réduit à la valeur n°. 195.

197. Le mobile passe de Q en A par différens degrés de vîtesse qu'il est important de connoître. Pour cela désignons par s la *vitesse anguluire*, c'est-à-dire, la vîtesse du

point de la ligne MO qui est distant de O de l'unité : les circonférences étant entr'elles comme leurs rayons, les vîtesses des points qui les décrivent sont dans le même rapport ; ainsi la vîtesse du point M est ru, et on a (192) $ru = \sqrt{(2g \times DG)}$: or $DG = OG - OD$, et les triangles OMG, OQD donnent $OG = r.\cos\theta$, $OD = r.\cos f$, donc

$$u = \sqrt{\left\{\frac{2g}{r}(\cos\theta - \cos f)\right\}} \quad \ldots\ldots \quad (t').$$

VI. *Propriétés mécaniques de la cycloïde.*

198. Servons-nous de la formule (r') pour trouver le tems qu'emploieroit un corps pesant, placé en M, sans impulsion initiale, pour descendre au point A le plus bas, de l'arc de cycloïde MA, dont l'axe CC' est horisontal. Soit a le diamètre BA du cercle générateur, nous avons vu (67) que l'équation de la cycloïde est $s^2 = 4ay$, en prenant AB pour axe des y, et le point A pour origine. On en tire $ds = \sqrt{a}.\frac{dy}{\sqrt{y}}$; et comme, en supposant $AP = h$, on a pour la vîtesse du mobile en O, $\sqrt{(2g \times PO)} = \sqrt{(2g(h-y))} = \frac{-ds}{dt}$, on en tire Fig. 106 bis.

$$dt = \frac{1}{\sqrt{(2g)}}.\frac{-ds}{\sqrt{(h-y)}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{2a}{g}\right)} \times \frac{-dy}{\sqrt{(hy - y^2)}},$$

d'où (160) $t = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{2a}{g}\right)}.\text{arc}\left(\cos = \frac{2y-h}{h}\right) + C$; et en prenant l'intégrale depuis $y = h$, jusqu'à $y = 0$, $t = \frac{\pi}{2}.\sqrt{\left(\frac{2a}{g}\right)}$.

On tire de là deux conséquences remarquables.

1°. Cette valeur est la même que nous avons déja trouvée pour le tems de la demi-oscillation (195) dans un arc de cercle très-petit, en supposant toutefois $2a = r$; c'est-à-dire que le cercle doit avoir $2 \times AB$ pour rayon. Cela vient de ce que le cercle osculateur de la cycloïde au point A, a pour rayon $2a$, et se confond avec cette courbe pendant un petit arc : on peut donc supposer que ce cercle est, dans cet espace, la courbe que le corps pesant décrit.

2°. La quantité h n'entrant point dans la valeur du tems t, il s'ensuit que le tems employé à arriver au point A seroit le même, quel que fût le point de départ M. Cette propriété de la cycloïde, n'appartient au cercle dans les arcs très-petits, que parce que ces courbes sont osculatrices. On a donné à cette propriété dont jouit la cycloïde le nom de *Tautochronisme*.

Après avoir reconnu que la cycloïde étoit Tautochrone, HUYGHENS, à qui on doit l'application du pendule aux horloges, imagina de leur donner pour régulateur un pendule à oscillations cycloïdales : voici comment il en conçut l'exécution. On sait que la cycloïde a pour développée une autre cycloïde égale, mais disposée en sens différent (Cal. diff. élém. de *Lacroix*, 103). Supposons donc qu'on
Fig. 104. a courbé deux lames AC et AD, sous la forme de deux arcs de cycloïde égaux, qui auroient pour origine commune le point A de suspension d'un pendule. Il est clair que le fil en se courbant successivement sur chacune des deux lames, feroit décrire au mobile un arc de cycloïde, et cela quelle que fût l'excursion qu'il seroit contraint à faire. Mais cette théorie est plus ingénieuse qu'utile ; car comment conserver aux lames la forme qu'on leur a donnée ?

Le froid, le chaud, et toutes les impressions de l'atmosphère, sont autant d'ennemis qui s'y opposent. On se sert avec plus d'avantage des pendules à petites oscillations ; leur mouvement est également isochrone, et n'a pas les mêmes inconvéniens.

199. Après avoir reconnu que la cycloïde est une courbe tautochrone, il convient de s'assurer si elle jouit seule de cette propriété. Prenons l'origine des coordonnées au point le plus bas, et comptons les y verticalement. Il est d'abord évident que pour que la courbe soit tautochrone, il est nécessaire et il suffit que, pour chaque instant, la composante de la gravité dans le sens de la tangente, soit proportionnelle à l'arc qui reste à décrire pour arriver au point le plus bas. Il suit de là que, comme $g.\frac{dy}{ds}$ est cette composante, on a $Kg.\frac{dy}{ds} = s$, K étant une constante. On en déduit $2Kgy = s^2$, équation qui est visiblement celle d'une cycloïde, lorsque la tautochrone est dans un plan ; cela confirme ce que nous venons de dire dans le numéro précédent.

Mais si la courbe est à double courbure, en égalant les valeurs de s^2 tirées des deux équations précédentes, et faisant $\frac{1}{2}Kg = A$, on trouve

$$A\frac{dy^2}{y} = ds^2, \text{ ou } A\frac{dy^2}{y} = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

En sorte que si une relation entre les trois variables x, y et z satisfait à cette équation, la courbe à laquelle elle appartiendra sera tautochrone, et réciproquement. Or une seule relation entre trois coordonnées ne suffit pas pour déterminer une courbe : si elle étoit intégrable (et par

conséquent décomposable en deux facteurs du premier degré), elle donneroit une surface courbe qui seroit le lieu de toutes les tautochrones, c'est-à-dire, que toutes les courbes qu'on pourroit tracer sur cette surface jouiroient de la propriété du tautochronisme. Mais comme cette équation n'est pas intégrable, elle n'appartient pas à une surface courbe, et elle est du nombre des équations qu'on regardoit autrefois comme absurdes, et que MONGE a démontrées être l'une des deux équations d'une courbe à double courbure.

Il suffit en effet de se donner au hasard une relation entre x, y et z, et, concurremment avec la précédente, on aura les deux équations d'une courbe : de sorte qu'en éliminant, on pourra obtenir deux relations, finies ou différentielles, l'une entre x et y, et l'autre entre z et y, qui seront les projections sur les plans verticaux coordonnés de la tautochrone cherchée. Prenons, par exemple, l'équation $x^2 + z^2 + (y - r)^2 = r^2$, qui est celle d'une sphère dont le centre est sur l'axe des y; différentiant et éliminant avec l'équation ci-dessus, on obtiendra celles des projections de la tautochrone tracée sur notre sphère.

Il résulte de là qu'*il y a une infinité de Tautochrones à double courbure, et une seule Tautochrone plane, qui est la cycloïde, verticale ou inclinée.*

200. On peut même fixer les idées d'une manière plus particulière en se donnant un cylindre vertical à base quelconque, ou, ce qui revient au même, l'équation sur le plan horisontal de cette base qui est la projection de la tautochrone; de sorte que ce cylindre aura la tautochrone tracée sur sa surface. L'élément de l'arc de la base est $d\mu^2 = dx^2 + dz^2$, ce qui change notre équation différentielle en $A\frac{dy^2}{y} = dy^2 + d\mu^2$. Or il est aisé d'en

conclure que cette équation est celle d'une cycloïde qui a l'arc μ pour abscisse, comptée sur la base cylindrique; ce qui veut dire que si on trace sur un plan une cycloïde, et qu'on la courbe sur un cylindre vertical à base quelconque, en mettant l'origine au point le plus bas, on aura une tautochrone à double courbure.

201. Le tems qu'un mobile emploie à parcourir la corde AL d'un cercle ALB, est le même que celui qu'il met à décrire le diamètre vertical $AB = a$ (190, 1°.), tems qui est (156, h) $= \sqrt{\left(\frac{2e}{g}\right)} = \sqrt{\left(\frac{2a}{g}\right)}$. Mais celui qu'il emploie à descendre le long d'un petit arc AI étant $\frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{2}a}{g}\right)}$, ($s'$), quantité plus petite que la précédente, ce qui indique que le chemin le plus court pour aller de I en A, n'est pourtant pas celui que le mobile décrit dans un moindre tems. Nous allons faire voir que *la ligne de plus vîte descente*, ou *Brachystochrone*, n'est pas même l'arc de cercle, et que cette courbe est la cycloïde. Fig. 34 bis.

Soient C et R deux points donnés, et CMR la courbe de plus vîte descente de l'un de ces points à l'autre; il est évident que si on prend deux autres points M et m' sur cette courbe, l'arc Mmm' sera aussi celui de la plus vîte descente de M en m'; car s'il n'en étoit pas ainsi, et si l'arc Mnm', par exemple, étoit celui de la plus vîte descente, il est clair que $CMnm'R$ seroit la courbe cherchée. Cela est vrai, quelle que soit la longueur de l'arc Mm'; supposons-le infiniment petit, et partagé en deux portions égales Mm, mm'. Il s'agit d'exprimer analytiquement que le point matériel, arrivant en M avec une vîtesse duc à la hauteur CP, parcourt l'arc Mmm' dans le moindre tems possible. Fig. 105.

Faisons $CP = x$, $PM = y$, $CM = s$; la vîtesse en M sera $\sqrt{[2gx]}$, et le tems employé à parcourir Mm sera (r'), $dt = \frac{ds}{\sqrt{(2gx)}}$. En faisant pareillement Cp ou $x + dx = x'$; pm ou $y + dy = y'$, $Cm = s + ds = s'$; on aura pareillement pour la vîtesse en m, $\sqrt{(2gx')}$, et pour le tems employé à parcourir mm', $\frac{ds'}{\sqrt{(2gx')}}$: le tems nécessaire pour descendre de M en m', devant être un *minimum*, on aura donc

$$\delta\left\{\frac{ds}{\sqrt{(2gx)}} + \frac{ds'}{\sqrt{(2gx')}}\right\} = 0.$$

Nous employons le signe δ, pour distinguer la différentielle qui a lieu ici, et qui se rapporte au passage d'un point de la courbe à un point d'une autre courbe, de celle qu'on désigne communément par la lettre d, et qui provient de la considération de deux points pris sur la même courbe : le premier cas a été appelé *Variation*. Or il y a ici des grandeurs constantes qu'il est facile de reconnoître; telles sont g, x, x', puisque ces grandeurs ne dépendent pas de la considération de variation qui vient d'être exposée. On a donc $\delta\left\{\frac{ds}{\sqrt{x}} + \frac{ds'}{\sqrt{x'}}\right\} = 0$, ou $\frac{\delta.ds}{\sqrt{x}} + \frac{\delta.ds'}{\sqrt{x'}} = 0$. Cela posé, à cause de $\delta.dx = 0$, on a $\delta.ds = \frac{dy}{ds}\,\delta.dy$; et aussi $\delta.ds' = \frac{dy'}{ds'}\,\delta.dy'$; donc $\frac{dy\,\delta.dy}{ds\sqrt{x}} + \frac{dy'\delta.dy'}{ds'\sqrt{x'}} = 0$. Or, soit qu'il s'agisse de l'arc Mnm', ou de l'arc Mnm', l'ordonnée pm ou pn devient toujours $p'm'$, donc $dy + dy'$ est une grandeur cons-

tante; doù on tire $\delta(dy + dy') = 0$, ou $\delta.dy = -\delta.dy'$: et

$$\frac{dy}{ds\sqrt{x}} - \frac{dy'}{ds'\sqrt{x'}} = 0.$$

Il est aisé de voir que le deuxième terme de cette équation n'est autre que le premier, dans lequel on a augmenté chaque variable de son accroissement; cette équation équivaut donc à $d\left(\frac{dy}{ds\sqrt{x}}\right) = 0$, ou $\frac{dy}{ds\sqrt{x}} = A$. Or $\frac{dy}{ds}$ est le sinus de l'angle que la tangente à la courbe fait avec l'axe des abscisses; au point où cette tangente est horisontale, cet angle est droit, et on a $\frac{dy}{ds} = 1$: soit a l'abscisse inconnue de ce point, on a $A = \frac{1}{\sqrt{a}}$, d'où $\frac{dy}{ds} = \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)}$; or $ds^2 = dx^2 + dy^2$, donc $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{x}{a-x}\right)}$, équation qui appartient à une cycloïde (67) dont l'axe des x est vertical, et qui a le diamètre de son cercle générateur $= a$; ainsi *la courbe de plus vite descente est une cycloïde.*

Pour construire cette courbe, il suffit de trouver le diamètre a du cercle générateur; comme on connoît l'abscisse et l'ordonnée du point R où le mobile doit parvenir, on mettra Fig. 106. ces valeurs dans l'équation précédente après l'avoir intégrée, et on en déduira la valeur de a. On peut aussi employer une construction fort simple : A et R étant les deux points donnés, on mènera la droite AR, on tracera sur la base horisontale AF une cycloïde quelconque AKL, et par le point K de rencontre de cette courbe avec AR, on mènera à l'extrémité L de son axe la droite KL; la pa-

rallèle RF à KL déterminera le point F qui donnera AF pour l'axe de la cycloïde cherchée, c'est-à-dire, que AF sera égal à la circonférence du cercle générateur, ou $AF=2\pi a$. Cette construction est fondée sur ce que toutes les cycloïdes sont des courbes semblables, puisqu'il n'entre dans leur équation qu'une seule constante, qui est le diamètre du cercle générateur. On voit aussi que pour deux points donnés A et R, il n'y a qu'une seule cycloïde qui puisse remplir les conditions du problème de la brachystochrone.

VII. *Du mouvement d'un point assujetti à parcourir une courbe plane.*

202. Jusqu'ici nous n'avons considéré d'autre force que la gravité : il est important maintenant de généraliser notre théorie et de l'étendre à des forces quelconques. Pour cela observons qu'un mobile ne peut être ainsi contraint dans son mouvement, sans qu'il exerce continuellement une pression sur la courbe qu'il décrit : cette pression est d'ailleurs normale à cette courbe ; car autrement elle pourroit se décomposer en deux, l'une normale et détruite, l'autre tangente et en vertu de laquelle le point n'auroit pas d'action sur la courbe, ce qui est contre l'hypothèse, (47). Employons maintenant les procédés qui nous ont déja été utiles ; et pour ramener le mobile à l'état de liberté, où il doit être pour que les équations (b', c') soient applicables, introduisons au lieu de la réaction de la courbe, une force normale, (et par conséquent variable d'un point à l'autre, et de grandeur, et de direction) et qui soit sans cesse égale et opposée à cette réaction. On suppose que cette force agisse d'une manière active, avec celles du système réduites à deux X et Y, (166). Il est clair que détruisant sans

cesse la pression du mobile, elle le met dans le même état que s'il étoit libre : et la courbe qu'il décrit, peut être considérée comme une trajectoire ordinaire; ainsi la théorie rentre dans celle que nous avons déja analysée. Appliquons ces réflexions.

205. Soit BMZ la courbe plane que le mobile est assujetti à décrire : X et Y sont les forces parallèles aux axes Ax et Ay; le corps est supposé en M au bout du tems t; $BM = s$, $AP = x$, $PM = y$: enfin N est la force normale dont nous venons de parler. On sait que $\frac{dy}{ds}$ et $\frac{dx}{ds}$ sont les cosinus des angles que forme la normale avec les axes des x et des y, ainsi les composantes de N dans le sens de ces axes sont $-N\frac{dy}{ds}$, et $N\frac{dx}{ds}$ (*); la première est Fig. 109.

(*) Il est intéressant de remarquer que quelle que soit la forme de la courbe, et le sens dans lequel on suppose que la force N agisse suivant la normale, ces deux composantes seront toujours de signes contraires. Il suffit pour s'en convaincre de considérer que, par la figure même de la courbe, les rapports différentiels $\frac{dy}{ds}$ et $\frac{dx}{ds}$ sont de signes contraires dans les cas où les deux composantes de N tendent à-la-fois à diminuer ou à augmenter les x et les y; de sorte qu'on se trouve obligé pour ajouter ces composantes à X et à Y, ou pour les en soustraire, d'affecter l'une d'elles d'un signe contraire à l'autre. Cela vient de ce qu'on doit par la pensée concevoir que la courbe étant donnée par son équation, les rapports $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dx}{ds}$ sont connus en grandeur et en signes, et qu'on doit les employer dans le calcul, tels que la différentiation les donne; d'où il suit que si par la nature de cette équation $\frac{dx}{ds}$ est négatif, précisément dans le cas où la composante $N\frac{dx}{ds}$

ici négative, parce qu'elle tend à diminuer les x : ainsi le mobile peut être considéré comme libre et animé par les forces $X - N\frac{dy}{ds}$ et $Y + N\frac{dx}{ds}$; et les équations (b', c') deviennent, suivant qu'on a dt constant ou variable,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2} = X - N.\frac{dy}{ds}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y + N.\frac{dx}{ds} \\ &d\left(\frac{dx}{dt}\right) = \left(X - N\frac{dy}{ds}\right)dt, \quad d\left(\frac{dy}{dt}\right) = \left(Y + N.\frac{dx}{ds}\right)dt \end{aligned}\right\} \ldots (u').$$

Telles sont les équations du mouvement : et on voit que si on leur joint l'équation du canal que le mobile est assujetti à décrire, on aura trois relations entre les quatre variables x, y, t et N; de sorte qu'à l'aide de l'intégration et de l'élimination, on obtiendra des équations entre deux d'entr'elles, et la vîtesse. C'est ce que nous allons développer et appliquer à des exemples.

204. Pour trouver la valeur de la vîtesse employons le procédé du n°. 168. Multiplions la première de nos équations par dx, la seconde par dy, et ajoutons : ce calcul fait disparoître les termes qui renferment N; et on a encore ici, comme précédemment, $v^2 = A + 2\int(Xdx + Ydy)$,

---

doit être soustraite de X, c'est faire cette soustraction que d'écrire $X + N.\frac{dx}{ds}$. Quant au sens dans lequel la force N agit sur la normale, on ne peut le connoître d'avance : mais il est indifférent pour l'analyse, puisqu'un de ses plus grands avantages est de donner à-la-fois les grandeurs inconnues et le sens dans lequel on doit les prendre. Si donc la valeur de N, (formule v') se trouvoit négative, on reconnoîtroit que cette force agit dans le système dans un sens opposé à celui qu'on lui attribue ici.

ou $v^2 = A + 2\chi$, ce qui donne la valeur de v, et nous fournit plusieurs conséquences importantes.

1°. Comme la constante A dépend de la valeur de χ lorsque v a une valeur déterminée, c'est-à-dire des coordonnées du lieu du mobile à un instant donné, on voit qu'en général *la vîtesse ne dépend nullement de la forme de la courbe décrite, mais seulement des positions respectives des points de départ et d'arrivée* ; de sorte que si le corps étoit assujetti à décrire une autre courbe quelconque, passant par ces deux mêmes points il auroit encore la même vîtesse. Cela revient à dire que la valeur de la vîtesse étant indépendante de la pression que le point mobile exerce sur la courbe qu'il décrit, elle est la même que s'il étoit libre. Ainsi *la pression qu'exerce le mobile sur la courbe qu'il est contraint de décrire, ne diminue rien de sa vîtesse* (*).

2°. Si le mobile n'est soumis à l'action d'aucune force continue, son mouvement ne peut provenir que d'une impulsion primitive ; et comme la nature de la courbe que le mobile doit décrire ne peut altérer cette vîtesse, d'après

---

(*) Cette conséquence peut être rendue immédiatement évi- Fig. 107 bis.
dente. En effet lorsqu'un mobile dénué de tout ressort et lancé dans la direction FE avec la vîtesse V, rencontre un plan BH qui lui fait obstacle, en représentant la vîtesse V par FE, et formant le rectangle BI, cette vîtesse est décomposée en deux autres BE et EI : celle-ci est détruite par le plan ; la première a son entier effet, de sorte que le corps glisse le long de BH avec la vîtesse BE : il a donc perdu la vîtesse $FE - BE = V - V.\cos\theta$ en nommant θ l'angle FEB. Cela posé, on voit que la vîtesse perdue étant $V(1 - \cos\theta) = V.\text{sin.ver.}\theta$, lorsque le corps décrira une courbe, il perdra, en passant d'un élément à l'autre, une vîtesse proportionnelle à un sinus verse, et par conséquent à un infiniment petit du second ordre : de sorte que la vîtesse perdue ne sera finie que lorsque l'arc décrit sera infini.

$$\frac{dx}{dt} = gt.\cos\iota.\sin\iota + D,\quad \frac{dy}{dt} = gt\sin^2\iota + E,$$

et la vîtesse dans le sens de AB est $\frac{ds}{dt} = \frac{dx}{dt.\cos\iota} = gt\sin\iota + C$.

4°. On a enfin pour l'espace parcouru au bout du tems t, de B vers A, $s = \frac{1}{2}gt^2\sin\iota + Ct + C'$.

On peut remarquer l'accord qui existe entre tout ce qui vient d'être dit, et ce qu'on a vu (189).

207. L'équation (ν') fait voir que la pression qu'un point matériel exerce sur une courbe qu'il est assujetti à décrire, se compose de deux parties ; l'une qui est due à la vîtesse actuelle de ce corps ; l'autre qui provient uniquement des forces accélératrices qui le sollicitent : et comme $X\frac{dy}{ds}$ et $Y\frac{dx}{ds}$ sont les composantes des forces X et Y dans le sens de la normale, cette dernière partie est la somme de ces composantes. Or il pourroit arriver que le corps ne fût soumis à l'action d'aucune force accélératrice ; son mouvement ne seroit alors dû qu'à une impulsion primitive, et seroit uniforme (204, 2°.) ; alors la pression se réduiroit à la première partie et on auroit

$$N = \frac{v^2}{R} \text{ ou } N = \frac{2gh}{R} \ldots\ldots (x')$$

h étant la hauteur due à la vîtesse v.

Cela posé, si on conçoit que le mobile est lié à l'une des extrémités d'un fil inextensible dont l'autre est fixe, il est clair qu'il décrira la circonférence d'un cercle avec une vîtesse constante, et que la tension de ce fil sera donnée par l'équation précédente ; on a nommé cette tension

Force Centrifuge. Cette force repose sur la double notion d'un mouvement uniforme et circulaire, et sa dénomination vient de ce que le mobile tendant par son inertie à se mouvoir en ligne droite, il ne peut être contraint à décrire une courbe sans faire un effort continuel pour s'échapper par la tangente, et s'éloigner du centre de son mouvement (*).

(*) On peut aisément parvenir à la valeur de la force centrifuge sans le secours de l'équation (v'), et même trouver par là une autre démonstration de cette formule. Soit ABE la circonférence qu'un point matériel décrit en vertu d'une impulsion ; sa vitesse v sera constante ; soit A le lieu du mobile à un instant quelconque : s'il devenoit tout-à-coup libre, il parcourroit la tangente AT uniformément : et pendant l'instant dt, il décriroit l'espace $Af = vdt$. Mais la force centrale N qui ramène le point dans le cercle, faisant parcourir pendant le tems dt l'espace Ab, le mobile devra décrire la diagonale Ad du parallélogramme fd, et le point d devra être sur la circonférence : cela posé par la nature de cette courbe on a $(bd)^2 = Ab \times bE$, or comme Ad est infiniment petit, bE équivaut à $2 \times AB = 2R$; ainsi $(bd)^2$ ou $v^2dt^2 = 2R \times Ab$. Mais la force accélératrice N, supposée constante pendant le tems t, feroit parcourir l'espace (154) $\frac{1}{2}Nt^2$; donc pendant l'instant dt, elle fera effectivement décrire l'espace $\frac{1}{2}Ndt^2 = Ab$; on a donc $v^2 = R \times N$, d'où $N = \frac{v^2}{R}$. Fig. 109.

S'il s'agissoit d'une courbe quelconque parcourue en vertu d'une impulsion, tout ce qu'on vient de dire auroit encore lieu, car à chaque instant le corps peut être supposé parcourir le cercle osculateur de cette courbe. Ainsi la force centrifuge varieroit à chaque point, et l'équation (x') lui serviroit encore de mesure en désignant par R le rayon de courbure.

Enfin si le corps est soumis à l'action de forces accélératrices, sa vitesse étant v au bout du tems t, si ces forces cessoient tout-à-coup leur action, la pression sur la courbe seroit $= \frac{v^2}{R}$;

Fig. 109 bis. 208. Si le mobile n'est soumis qu'à la force accélératrice de la pesanteur, soit CR la courbe qu'il est assujetti à décrire; MP vertical et $= y$, $AP = x$; on a alors $X = 0$ et $Y = g$, la valeur de la pression devient $\frac{v^2}{R} + g\frac{dx}{ds}$. Supposons que le mobile avoit en C sur la courbe une vîtesse due à la hauteur h, il aura en M la vîtesse due à la hauteur $h+y$, (192); d'où $v^2 = 2g(h+y)$, et la pression $= \frac{2g(h+y)}{R} + g\frac{dx}{ds}$.

Pour trouver la courbe sur laquelle la pression est la même pour tous les points, il faut donc regarder cette quantité comme constante, et intégrer. Le rayon de courbure pris dans l'hypothèse de ds constant a pour valeur $R = \frac{dyds}{d^2x}$; donc il s'agit d'intégrer l'équation

$$2(h+y)\,d^2x + dxdy = Cdyds.$$

Le facteur $\frac{1}{2}(h+y)^{-\frac{1}{2}}$ la rend intégrale, et comme ds est constant on a (en intégrant par parties)

$$(C\sqrt{(h+y)} + A)\,ds = \sqrt{(h+y)}dx \ldots\ldots (1).$$

Comme en général $\frac{dx}{ds}$ est le sinus de l'angle que la courbe fait en un point quelconque avec la verticale, et qu'on connoît au point A la valeur de ce sinus; cela sert à déterminer la constante A que nous regarderons comme connue.

---

cette pression doit d'ailleurs être augmentée de la somme des composantes $\frac{Xdy}{ds}$ et $\frac{Ydx}{ds}$ des forces accélératrices X et Y dans le sens de la normale. On doit donner le signe — à la composante de X parce qu'elle est dirigée en sens contraire de celle de Y, et on retrouve l'équation (v') parce que la force N est égale et opposée à la pression.

En quarrant et mettant pour ds^2 sa valeur $dx^2 + dy^2$, on trouve une équation très-facile à séparer, de sorte que l'intégration n'offre plus de difficultés.

Si la vîtesse initiale étoit nulle, on auroit $h = 0$, d'où on tireroit $A = 0$, en faisant dans l'équation (1), h et y nuls. On auroit donc $Cds = dx$, en divisant par $\sqrt{y}$; donc $(1 - C^2)dx^2 = C^2dy^2$, d'où $x = \frac{Cy}{\sqrt{(1 - C^2)}}$; la constante est nulle, parce que $x = 0$ donne $y = 0$. Ainsi *la courbe d'égale pression* est ici une droite qui fait avec la verticale un angle dont le sinus est $= C$; il faut que l'on ait $C < 1$.

209. La théorie des frondes est renfermée dans les équations (x'), v étant la vîtesse d'impulsion, et R la longueur constante du fil, la tension de ce fil est $\frac{v^2}{R}$. Si donc le fil ne pouvoit résister à cette tension, il se romproit. On voit de plus que, 1°. *à vîtesses égales deux frondes font éprouver à leurs fils des tensions réciproques à leurs longueurs;* 2°. *à rayons égaux, les tensions sont entr'elles comme les quarrés des vîtesses.*

210. Si dans (x') on fait $h = \frac{1}{2}R$, on a $N = g$, et la force centrifuge devient égale à la pesanteur g: ainsi un corps pesant attaché à l'une des extrémités d'un fil fixé par son autre extrémité, tendra ce fil avec la même force que s'il étoit suspendu verticalement, pourvu qu'il se meuve sur un plan horisontal avec la vîtesse qu'il acquerroit, en tombant d'une hauteur égale à la moitié de la longueur du fil.

Comme la terre a un mouvement de rotation autour de son axe, toutes ses parties sont animées d'un certain degré de force centrifuge, lequel est plus ou moins grand,

selon qu'elles sont plus ou moins éloignées de l'axe. Sous l'équateur les points sont à la plus grande distance de l'axe ; cette force, directement opposée à celle de la pesanteur, doit donc la diminuer davantage qu'en tout autre lieu ; et quant aux lieux intermédiaires entre les pôles et l'équateur, la diminution de la pesanteur doit être moins sensible, à mesure qu'ils sont plus près des pôles. Au pôle, la force centrifuge est nulle, et les corps ont le même poids que si la terre étoit immobile.

Il suit de là que si la terre a été fluide dans l'origine, elle n'a pu conserver, en vertu de son mouvement de rotation, la forme sphérique que l'uniformité de la pesanteur tendoit à lui donner. Car les parties plus proches de l'équateur pesant moins que les autres, il en a fallu davantage pour servir de contre-poids : il a donc fallu que cette masse prit la figure d'une espèce d'ellipsoïde, à-peu-près semblable à celui qui seroit engendré par la révolution d'une ellipse autour de son petit axe. C'est aussi ce que l'expérience confirme, car l'aplatissement vers les pôles rend l'axe de $\frac{1}{215}$ moindre que le diamètre de l'équateur.

A l'équateur les corps décrivent dans chaque seconde décimale un arc de $40^{m},11$ de la circonférence de l'équateur, dont le rayon est de 6 375 800 mètres environ ; pendant une seconde, les corps tombent sous l'équateur de $5^{m},65$: ainsi la force centrifuge est à la pesanteur dans le rapport de $\frac{1}{288,4}$. La première de ces deux forces diminue la seconde, et les corps ne tombent qu'en vertu de leur différence. Nommons donc *gravité* la pesanteur entière, la force centrifuge est à l'équateur environ le $\frac{1}{289}$. de la gravité. Si la rotation de la terre étoit dix-sept fois plus rapide, l'arc décrit dans une seconde sous l'équateur seroit dix-sept fois plus grand ; la force centrifuge seroit

alors égale à la gravité, et les corps cesseroient de peser sur la terre à l'équateur.

211. Supposons qu'un corps tourne autour d'un axe fixe; prenons un point à l'unité de distance de cet axe, et comparons les vitesses des autres points à celle de ce dernier, qu'on a nommée *vitesse angulaire* (197); c'est la vîtesse absolue du point situé à l'unité de distance de l'axe de rotation. Or les circonférences, et par conséquent les vîtesses des points qui les parcourent, sont entr'elles comme leurs rayons : ainsi u étant la vitesse angulaire, on aura pour la vîtesse v du point distant de R du centre de rotation, $v = Ru$, et sa force centrifuge sera $N = Ru^2$; on tire de là $u = \frac{v}{R}$, et $u = \sqrt{\frac{N}{R}}$: ces valeurs nous seront utiles par la suite.

Lorsqu'un corps tourne autour d'un axe fixe ses divers points sont animés de vîtesses de rotation, et les forces centrifuges qui en résultent sont utiles à comparer entre elles. Soient R et R' les distances de deux points à l'axe; v et v' leurs vîtesses; f et f' leurs forces centrifuges, on a $f = \frac{v^2}{R}$, $f' = \frac{v'^2}{R'}$. Mais puisque le mouvement de rotation qui anime le corps fait parcourir en même tems aux deux points que nous considérons les circonférences dont R et R' sont les rayons, on a visiblement $\frac{v}{v'} = \frac{R}{R'}$; donc $v^2 = \frac{v'^2R^2}{R'^2} = \frac{f'R^2}{R'^2}$; et $f = \frac{f'R}{R'}$, d'où $\frac{f}{f'} = \frac{R}{R'}$. Ainsi *les forces centrifuges des divers points d'un corps tournant autour d'un axe sont proportionnelles à leurs distances à cet axe.*

Cette conséquence résulte également de l'équation $N = Ru^2$, puisqu'elle donne $f = Ru^2$ et $f' = R'u^2$.

Ainsi lorsque la terre exécute autour de son axe sa rotation diurne, la force centrifuge de l'un des points de sa surface est proportionnelle à sa distance à l'axe de la terre, c'est-à-dire, au cosinus de sa latitude. Il suit de là que pour avoir la force centrifuge absolue de ce point, il faut multiplier la valeur trouvée ci-dessus pour la force centrifuge à l'équateur, par le cosinus de sa latitude.

VIII. *Du mouvement d'un point assujetti à parcourir une surface courbe.*

212. Concevons maintenant un point matériel assujetti à se mouvoir sur une surface courbe donnée, dont nous représenterons l'équation par $z = f(x, y)$: il sera aisé d'en conclure l'équation différentielle $dz = p\,dx + q\,dy$, p et q étant les coefficiens des différences partielles de z prises respectivement par rapport à x et à y. Nous ferons pour abréger $M = \sqrt{(1 + p^2 + q^2)}$: or on sait (voyez les feuilles de *Monge*, n°s 3 et 4, X) que la normale à une surface courbe fait avec les axes des x, y et z, des angles dont les cosinus sont $\frac{p}{M}$, $\frac{q}{M}$, $\frac{1}{M}$. Observons que tout ce qui a été dit n°. 202, du mouvement d'un point sur une courbe plane, de la pression qu'elle éprouve, et de la réaction qu'elle exerce, peut aussi être dit dans le cas actuel. D'après cela, si on introduit la force N dirigée suivant la normale, égale et opposée à la pression, ses composantes dans le sens des axes seront $-\frac{pN}{M}$, $-\frac{qN}{M}$, et $\frac{N}{M}$; nous affectons ces deux premières de signes négatifs, parce qu'elles tendent à diminuer les coordonnées x et y, en supposant que la surface courbe trouve sa

convexité vers les plans xz et yz, ainsi qu'il est facile de s'en convaincre. On pourra donc regarder le point mobile comme libre, et sollicité par les trois forces accélératrices $X-\frac{Np}{M}$, $Y-\frac{Nq}{M}$, et $Z+\frac{N}{M}$: on aura donc, au lieu des équations (b', c'), les suivantes

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&=X-\frac{Np}{M}\\ \frac{d^2y}{dt^2}&=Y-\frac{Nq}{M}\\ \frac{d^2z}{dt^2}&=Z+\frac{N}{M}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(y').$$

On suppose ici dt constant ; il seroit facile de faire toute autre hypothèse.

213. Les équations (y') ont le même usage que les formules (u'), et servent à donner toutes les circonstances du mouvement du mobile. En effet, si on multiplie la première par dx, la seconde par dy, et la troisième par dz, en ajoutant, N disparoîtra à cause de $dz=pdx+qdy$, et on obtiendra l'équation (d'), en suivant le même calcul qu'au n°. 168 ; d'où il résulte que toutes les conséquences énoncées n°. 204 ont également lieu ici.

De plus, si on multiplie les équations (y') respectivement par $-p$, $-q$ et 1, en ajoutant il viendra

$$\frac{d^2z-pd^2x-qd^2y}{dt^2}=Z-pX-qY+\frac{N}{M}(1+p^2+q^2).$$

Mais si on observe que $M^2=1+p^2+q^2$; et que $dz=pdx+qdy$, donne, en différentiant . . . . . $d^2z=p.d^2x+q.d^2y+dp.dx+dq.dy$: on aura

$$\frac{dpdx+dqdy}{dt^2}=Z-pX-qY+NM,$$

d'où on tire, à cause de $ds = vdt$

$$N = \frac{(dp\,dx + dq\,dy)v^2}{M.ds^2} + \frac{pX + qY - Z}{M} \ldots\ldots (z').$$

Il seroit aisé de déduire de ces formules celles que nous avons trouvées lorsque l'orbite est plane; mais nous ne nous y arrêterons pas, parce qu'il n'y a ni intérêt ni difficulté. Nous ajouterons seulement que dans chaque cas particulier, il est plus convenable de trouver la valeur de N, en faisant le calcul précédent sur les équations qui tiennent lieu de celles (y'), que d'employer la valeur (z'). La même observation doit être faite pour la formule (d').

214. L'usage des équations (y') et (z') est le même que précédemment. L'équation (d') donnera d'abord la vîtesse v, à l'aide de laquelle et de celle de la surface (qui donne p, q, M, $\frac{dp}{dx}$, $\frac{dq}{dx}$, $\frac{ds}{dx}$ en fonction de x et y), on obtiendra N: enfin les formules (y') serviront, concurremment avec l'équation de la surface, à déterminer le lieu du mobile et la courbe qu'il décrit.

Pour appliquer ces principes à un exemple, concevons
Fig. 110. une parabole BAC qui tourne autour de son axe vertical AD; le paramètre étant $2a$, la surface engendrée aura pour équation, en prenant le point A pour origine,

$$2az = x^2 + y^2, \text{ d'où } a\,dz = x\,dx + y\,dy \ldots . (1).$$

On tire de là $p = \frac{x}{a}$, $q = \frac{y}{a}$, $M = \sqrt{\left(1 + \frac{2z}{a}\right)}$.

Supposons donc qu'un point mobile pesant reçoit une impulsion quelconque, et est assujetti à se mouvoir sur le paraboloïde, on aura $X = 0$, $Y = 0$ et $Z = -g$, et les équations (y') seront ici

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{Nx}{M\alpha},\ \frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{Ny}{M\alpha},\ \frac{d^2z}{dt^2}=-g+\frac{N}{M}\ldots(2).$$

L'équation (d') donne $v^2=2g(h-z)$, à cause de $\chi=-g$; h est ici une constante qui dépend de la vitesse initiale. Cette expression s'obtient d'ailleurs directement en pratiquant le calcul du n°. 168 : il consiste à multiplier respectivement les équations (2) par dx, dy et dz, puis à ajouter et intégrer, ce qui donne

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=\frac{ds^2}{dt^2}=v^2=C-2gz=2g(h-z)\ldots(3),$$

Eliminons N entre les deux premières équations (2), nous aurons $xd^2y-yd^2x=0$, d'où

$$xdy-ydx=Cdt.$$

Ainsi le principe des aires (170) a lieu dans le sens horisontal, ce qui étoit facile à prévoir. Le quarré de l'équation précédente retranché de celui de l'équation (1) donne $\alpha^2dz^2+C^2dt^2=(x^2+y^2)(dx^2+dy^2)$; or $x^2+y^2=2\alpha z$; de plus l'équation (3) donne $\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}=2g(h-z)-\frac{dz^2}{dt^2}$; donc en substituant

$$\alpha^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2+C^2=2\alpha z\left\{2g(h-z)-\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}$$

d'où

$$\frac{dz}{dt}=\sqrt{\left\{\frac{4\alpha gz(h-z)-C^2}{\alpha^2+2\alpha z}\right\}}$$

Par l'intégration on déduira z en fonction de t, et par suite toutes les autres circonstances du mouvement.

C'est ainsi, par exemple, que pour obtenir la valeur de la pression N, il faudroit multiplier respectivement les équations (2) par $-x$, $-y$ et α, puis ajouter; il viendroit,

à cause de la différentielle de l'équation (1)

$$\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}=-g\alpha+N\sqrt{(\alpha^2+2\alpha z)}.$$

Mettant ici pour le premier membre sa valeur tirée de la formule (3), ainsi que celle de $\frac{dz^2}{dt^2}$; on a enfin

$$N=\frac{g\alpha^2(2h+\alpha)+C^2}{(\alpha^2+2\alpha z)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si on fait $\frac{dz}{dt}=0$, on aura les points où la hauteur z est un *maximum* ou un *minimum* ; on obtient par là deux valeurs de z qui sont

$$z=\frac{h}{2}\pm\sqrt{\left\{\frac{h^2}{4}-\frac{C^2}{4\alpha g}\right\}}$$

Ces valeurs sont inégales, l'une se rapporte au *maximum* et l'autre au *minimum* : ces quantités dépendent des constantes C et h, qui sont relatives aux circonstances initiales du mouvement.

On peut déterminer ces constantes de manière à satisfaire à certaines conditions : si, par exemple, on veut rendre les deux valeurs de z égales, ce qui exige que $h^2\alpha g=C^2$, alors il est clair que l'orbite est un plan horizontal, et

Fig. 110. comme $z=\frac{h}{2}$; son élévation constante AD au-dessus du plan xy est connue. Le mouvement est alors renfermé dans les équations

$$x\,dy-y\,dx=C\,dt,\quad h^2\alpha g=C^2,\quad x^2+y^2=\alpha h.$$

Comme les coordonnées polaires sont plus commodes, prenons l'origine au centre D de l'orbite circulaire,

c'est-à-dire, au point où son plan rencontre l'axe des z; le rayon est $DC = OF = V(\alpha h)$; pour changer de coordonnées, on fera donc $x = V(\alpha h) \times \cos\theta$, $y = V(\alpha h) \times \sin\theta$, θ étant l'angle EOF formé par le rayon vecteur OE avec l'axe des x OF: notre première équation devient par là $\alpha h . d\theta = C dt$; et comme $\frac{d\theta}{dt}$ est la vîtesse angulaire, on voit qu'elle est constante, ce qui indique qu'alors le mouvement est uniforme. Comme $C = h . V(\alpha g)$, on voit même que la vîtesse angulaire est $= V\left(\frac{g}{\alpha}\right)$, valeur indépendante de h, et qui fait voir que pour le même paraboloïde cette vîtesse est constamment la même, quelle que soit la hauteur AD de l'orbite au-dessus du plan xy.

On pourroit également appliquer la théorie au cas où l'équation de la surface seroit implicite; c'est ce qu'on va faire voir par un exemple.

215. Prenons pour seconde application le pendule à *oscillations coniques*. Concevons un fil inextensible et sans pesanteur, dont l'une des extrémités est liée à un point matériel pesant, et dont l'autre bout est fixe. L'origine étant en ce dernier point la surface de sphère que le mobile sera assujetti à parcourir aura pour équation $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, d'où $x dx + y dy + z dz = 0$.... (1), r est la longueur du pendule. Prenons l'axe des z vertical, et comptons les z positifs de haut en bas. On a ici $X = 0$, $Y = 0$, $Z = g$: de plus $p = -\frac{x}{z}$, $q = -\frac{y}{z}$ et $M = \frac{r}{z}$: les équations (y') deviennent ici

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{Nx}{r}, \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{Ny}{r}, \frac{d^2z}{dt^2} = g + \frac{Nz}{r} \quad .... \quad (2).$$

L'équation (d^4) donne $v^2 = 2g\,(z - h)$, h étant une constante qui dépend de l'impulsion initiale qui peut avoir été donnée au mobile dans une direction quelconque. On peut aussi traiter directement les équations (2) en suivant le procédé du n°. 168 : multiplier la première par dx, la seconde par dy, la troisième par dz, ajouter et intégrer ; ce qui donne

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = 2g(z - h) = v^2 \ldots\ldots (3).$$

Pour obtenir la valeur de N je multiplie respectivement les équations (2) par x, y et z ; ajoutant, et ayant égard à la différentielle de l'équation (1) on trouve . . . . . $-\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = Nr + gz$; et enfin on a la pression $= \frac{g(3z - 2h)}{r}$. Sans chercher à introduire cette valeur dans les équations (2), pour éliminer ensuite, afin d'obtenir des équations entre deux des quatre variables x, y, z et t, on peut éliminer N entre les deux premières. En effet il est aisé de voir que, comme la gravité n'est pas dirigée sans cesse vers l'origine des coordonnées, il est vrai que le principe des aires n'a point lieu : mais on doit trouver qu'il existe dans le sens horisontal, puisqu'aucune force n'agit parallèlement au plan xy. Multiplions donc respectivement par y et par x les deux premières équations (2) ; soustrayons et intégrons, il viendra

$$x dy - y dx = A dt \ldots\ldots (4)$$

A étant une constante arbitraire. Les trois équations (2) sont donc remplacées par les expressions (1), (3) et (4) qui sont du premier ordre, et doivent servir à déterminer les valeurs de x, y et z en fonction de t : c'est ce que nous

allons voir. Elevons au quarré $xdx + ydy = -zdz$, et la formule (4), puis ajoutons ; nous aurons . . . . . $(x^2 + y^2)(dx^2 + dy^2) = A^2dt^2 + z^2dz^2$; mais $x^2 + y^2 = r^2 - z^2$, et $\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = 2g(z-h) - \frac{dz^2}{dt^2}$; substituant et transposant on trouve enfin

$$dt = \frac{-rdz}{V\{2g(r^2 - z^2)(z-h) - A^2\}} \ldots\ldots (5).$$

Nous mettons ici le signe —, parce que nous supposons que les tems sont comptés à partir de l'instant où le mobile est au point le plus bas de son orbite, ce qui exige que t croisse, lorsque z décroît.

Cherchons maintenant les maxima et minima de z ; pour cela il faut faire $dz = 0$. L'équation (3) donne $vdv = gdz$, on a donc alors $dv = 0$; ainsi en ces points la vitesse est aussi un maximum ou un minimum. $dz = 0$ donne $2g(r^2 - z^2)(z-h) - A^2 = 0$, et en développant

$$z^3 - hz^2 - r^2z + r^2h + \frac{A^2}{2g} = 0.$$

Cette équation a au moins deux racines réelles, car l'orbite a nécessairement un maximum et un minimum, puisque le mobile parcourt la sphère. Or les imaginaires étant toujours en nombre pair (Compl. d'alg. de *Lacroix*, 40), notre équation doit avoir ses trois racines réelles, et tomber par conséquent dans le cas irréductible : de plus une seule est négative, d'après l'ordre des signes (Compl., 43). On peut donc en désignant par a, b et $-c$ ces trois racines écrire notre équation sous la forme $(z-a)(z-b)(z+c) = 0$, a, b et c étant des nombres positifs. Si on exécute les multiplications et si on compare, on aura

$$a + b - c = h,\ bc + ac - ab = r^2,\ abc = r^2h + \frac{A^2}{2g}.$$

La seconde donne

$$c = \frac{r^2 + ab}{a+b} \ldots\ldots (6).$$

Substituant dans la première on a $h = \frac{a^2 + ab + b^2 - r^2}{a+b}$: enfin la dernière donne $A^2 = \frac{2g(r^2 - a^2)(r^2 - b^2)}{a+b}$.

Voilà par conséquent les constantes A et h, déterminées en fonction de r, a et b : c est une fonction connue de ces mêmes quantités : b et a sont les z du point le plus élevé et du point le plus bas de l'orbite. Introduisons donc a, b et c au lieu des arbitraires A et h, dans l'équation (5); elle devient

$$dt = \frac{-rdz}{\sqrt{\{2g(a-z)(z-b)(z+c)\}}} \ldots\ldots (7).$$

La résolution du problême dépend de l'intégration de cette formule. En effet supposons que z soit connu en fonction
Fig. 96. de t : soit DCM la projection de l'orbite sur le plan xy; M sera celle du mobile au bout du tems t; A est le centre. Faisons l'angle $MAP = \chi$ et $AM = \varrho$; comme $AP = x$ et $PM = y$, le triangle MAP donne

$$x = \varrho \cos\chi, \; y = \varrho \sin\chi, \; \varrho^2 = x^2 + y^2 = r^2 - z^2.$$

Ces valeurs étant introduites dans l'équation (4) donnent $\varrho^2 d\chi = Adt$, d'où $d\chi = \frac{Adt}{r^2 - z^2}$: en intégrant on aura donc χ, et par suite x et y en fonction de t.

Pour avoir le tems de la demi-oscillation, c'est-à-dire, de celui que le mobile emploie à parvenir du point le plus bas au point le plus élevé de son orbite, il faut intégrer l'équation (7) entre les limites $z = a$, et $z = b$. Pour cela supposons

$$\sin^2\theta = \frac{a-z}{a-b}.$$

Cette transformation est destinée à faciliter l'intégration;

elle est d'ailleurs légitime ; car comme le mobile ne doit jamais sortir des limites $z = a$ et $z = b$, la nature de la question exige qu'on ne puisse jamais avoir $z > b$ et $z < a$; $a - z$ et $a - b$ sont donc positifs. De plus z passe par toutes les grandeurs entre a et b, comme $\frac{a-z}{a-b}$ passe de o à 1, sans sortir de ces limites qui sont aussi celles de $\sin\theta$. Les limites sont remplacées par $\sin\theta = 0$, et $\sin\theta = \pm 1$.

Il est aisé de voir qu'on a $z = a\cos^2\theta + b\sin^2\theta$; on tire de là les valeurs de dz, $a - z$, $z - b$, et $z + c$; qui sont $2\sin\theta\cos\theta(b-a)d\theta$, $(a-b)\sin^2\theta$, $(a-b)\cos^2\theta$ et $\frac{1-\gamma^2\sin^2\theta}{(a+b)\{(a+b)^2+r^2-b^2\}}$, en supposant pour abréger

$$\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2+r^2-b^2} = \gamma^2 ;$$

en substituant dans l'équation, on trouve

$$dt = \sqrt{\left\{\frac{1}{g}\cdot\frac{2(a+b)}{(a+b)^2+r^2-b^2}\right\}} \times \frac{rd\theta}{\sqrt{(1-\gamma^2\sin^2\theta)}},$$

ou $$dt = r\gamma\cdot\sqrt{\left(\frac{2}{g(a-b)}\right)} \times \frac{d\theta}{\sqrt{(1-\gamma^2\sin^2\theta)}}.$$

La formule de Newton donne pour le développement de $(1-\gamma^2\sin^2\theta)^{-\frac{1}{2}}$

$$1+\frac{1}{2}\gamma^2\sin^2\theta+\frac{1.3}{2.4}\gamma^4\sin^4\theta+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\gamma^6\sin^6\theta+\text{etc.}$$

Ainsi on n'a à intégrer que des termes de la forme $d\theta.\sin^m\theta$: or les formules connues (Cal. int. élém. de *Lacroix*, 203) donnent

$$\int d\theta.\sin^m\theta = -\frac{1}{m}.\cos\theta.\sin^{m-1}\theta + \frac{m-1}{m}\int d\theta.\sin^{m-2}\theta.$$

Nous n'aurons point égard ici au premier terme de cette

intégrale, parce qu'il est nul aux deux limites désignées. Un calcul semblable à celui du n°. 196 donne enfin

$$\int d\theta . \sin^m \theta = \frac{1.3.5 \ldots (m-1)}{2.4.6 \ldots m} \times \theta .$$

Or maintenant les limites $\sin\theta = 0$, $\sin\theta = \pm 1$, ne donnent pour θ que les valeurs indéterminées $\theta = k\pi$, $\theta = \frac{1}{2}(2n+1)\pi$, k et n étant des nombres entiers quelconques ; cela fait voir que le mobile devra passer une infinité de fois du maximum au minimum de z : cela s'accorde avec la théorie des oscillations (194). Pour obtenir les tems qui s'écoulent entre ces divers passages, il faudroit prendre tour-à-tour $\theta = \frac{1}{2}\pi$, $= \frac{3}{2}\pi$, $= \frac{5}{2}\pi$, ..., quantités qui diffèrent entr'elles de π ; et comme θ n'entre dans notre intégrale qu'à la première puissance, il est clair que les tems des oscillations sont égaux entr'eux.

Pour avoir le tems de l'oscillation entière, il faut prendre pour limites $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, ce qui donne

$$t = r\gamma\pi\sqrt{\frac{2}{g(a-b)}} \times \left\{1 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 + \left(\frac{1.3.\gamma^2}{2.4}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5.\gamma^3}{2.4.6}\right)^2 + \text{etc.}\right\}.$$

On peut déduire de cette formule les oscillations dans un cercle vertical ; car comme la projection de l'orbite sur le plan xy est alors une droite, on a $A = 0$: en remontant aux valeurs précédentes de A, h et c, on voit qu'on a $a = r$, $h = b$, et $c = r$: telles sont les valeurs de z qui répondent au maximum et au minimum ; on a aussi $\gamma^2 = \frac{r-h}{2r}$. En substituant, la valeur de t ci-dessus conduit à celle du n°. 196. Dans le cas des petites oscillations, $\frac{r-b}{2r}$ est une fraction très-petite, et qui est négligeable : ce qui donne de nouveau la formule (s', 195).

216. Nous ne dirons rien ici du mouvement d'un corps assujetti à parcourir une courbe à double courbure ; car cette courbe étant en général donnée par deux surfaces courbes dont elle est l'intersection, le corps est assujetti à rester sans cesse sur ces deux surfaces. Il seroit donc aisé d'appliquer ici à ces deux surfaces, les raisonnemens qu'on a faits (212) pour une seule. Il y auroit alors deux pressions normales, et le calcul seroit analogue au précédent.

tesses kV et $k'V'$ doivent être égales, et on a $kV = k'V'$. En mettant pour k et k' leurs valeurs $\frac{M}{m}$ et $\frac{M'}{m}$, on trouve que les forces impulsives sont égales, et que par conséquent il y a équilibre, lorsqu'on a $MV = M'V'$.

Il est vrai que notre démonstration suppose les masses commensurables, mais on pourroit aisément faire voir, par l'absurde, ou par la méthode des limites, qu'elle a encore lieu dans le cas contraire : ainsi nous ne nous y arrêterons pas. Nous ajouterons seulement ici que comme les vîtesses V et V' sont dirigées en sens contraires, il faut regarder leurs valeurs comme affectées de signes différens : nous mettrons donc l'équation précédente sous la forme

$$MV + M'V' = 0 \ldots\ldots (a'').$$

Bien entendu qu'il faudra prendre V et V' avec les signes qui leur sont propres, d'après les sens suivant lesquels ces vîtesses sont dirigées. Cette manière d'envisager la chose, est plus convenable que la précédente, puisque l'équation $MV = M'V'$ n'exprime pas que les corps marchent en sens contraire ; tandis que par là l'équation (a'') renferme cette condition.

On a donné au *produit de la masse par la vîtesse* le nom de QUANTITÉ DE MOUVEMENT ; de sorte qu'on dit que *deux corps qui se choquent en allant en sens contraire, restent en équilibre lorsque leurs masses sont en raison inverse de leurs vitesses*, ou, si on veut, *lorsque leurs quantités de mouvement sont égales*. La manière dont nous avons démontré ce théorême fait voir que l'équilibre n'a lieu que dans ce cas, et que, par conséquent, la proposition réciproque est vraie. Il suit aussi des raisonnemens précédens que les forces ne sont proportionnelles aux vîtesses qu'elles impriment que lorsqu'elles agissent sur

des masses égales : mais que lorsque les masses sont inégales, elles sont proportionnelles aux quantités de mouvement, c'est-à-dire, aux produits des masses par les vîtesses : de sorte que dorénavant *nous mesurerons la force d'un corps en mouvement, par le produit de sa masse par la vîtesse dont elle est animée.*

218. Passons maintenant au cas où les forces ne sont pas égales; alors la masse M ne fait plus équilibre à la masse M'; mais comme on a dit qu'on pourroit regarder à l'instant du choc les deux corps comme juxtà-posés, en repos et recevant dans cet état les impulsions qui les avoient animés, on voit que MV et $M'V'$ étant ces deux forces, le système est composé de la masse $M+M'$ en repos, sollicitée par la force $MV-M'V'$, ou plutôt $MV+M'V'$, parce que nous devons regarder V' comme négatif. La même chose auroit lieu si les forces agissoient dans le même sens, seulement V' seroit ici positif. Soit v la vîtesse inconnue commune aux deux corps après le choc, la force capable de communiquer à la masse $M+M'$ cette vîtesse v, est évidemment $(M+M')v$; donc on a $(M+M')v=MV+M'V'$; d'où

$$v=\frac{MV+M'V'}{M+M'} \ldots\ldots\ldots (b'').$$

Cette formule a lieu, soit que les corps aillent dans le même sens, soit qu'ils aillent en sens contraires, parce que dans ce dernier cas, la valeur de V' est négative. Si le corps M' étoit en repos, il suffiroit de faire $V'=0$; car il est visible que la force MV devroit mouvoir la masse $M+M'$ avec la vîtesse v; ce qui donne $(M+M')v=MV$, d'où

$$v=\frac{MV}{M+M'} \ldots\ldots\ldots (c'').$$

Ainsi la formule (b'') renferme tous les cas possibles du choc de deux corps, soit qu'ils aillent dans le même sens, soit qu'ils marchent en sens contraire, soit enfin que l'un d'eux soit en repos.

219. La formule (b'') fournit quelques conséquences importantes.

1°. Prenons d'abord le cas où $V'=0$, qui est renfermé dans l'équation (c''). On voit qu'on a $v<V$; ainsi lorsqu'un corps est en mouvement dans un fluide en repos, sa vîtesse doit diminuer à chaque instant, puisqu'il choque les particules de ce fluide, et les déplace pour se faire un passage. On voit aussi que plus M' croît, et plus v décroît; de sorte que si M' est infini par rapport à M, on a $v=0$. C'est ce qui arrive lorsqu'un corps pesant frappe la terre en tombant, et on voit qu'il seroit absurde de dire que ce choc déplace notre globe. La même chose arrive lorsqu'on frappe un édifice, ou quelqu'autre corps dont la masse est considérable : le mouvement du corps choquant est détruit sans qu'il en passe aucune partie dans le corps choqué : cela est même indépendant du frottement ou de l'adhérence de celui-ci à la terre.

2°. Observons que dans le cas ci-dessus, où le corps M' est en repos, M, qui a la force MV ou $(M+M')v$, perd, par le choc, la quantité de mouvement $M'v$, puisque celle qui lui reste est Mv. Or M' acquiert par le choc précisément la force $M'v$ qu'il a fait perdre à M. Cette perte de force dans le corps M annonce que M' a opposé une résistance au mouvement, et cela indépendamment de la pesanteur et de tout autre obstacle. Cette résistance qu'un corps oppose au mouvement, est ce qu'on a nommé *Force d'inertie :* cette dénomination est vicieuse, en ce qu'elle tend à faire croire qu'un corps en repos a

en lui-même une force particulière destinée à s'opposer dans tous les sens à celles qui tendroient à le mouvoir; mais il n'en est pas ainsi, et il est visible que cette force d'inertie n'est que le moyen de communication de mouvement d'un corps à un autre. Tout corps résiste au mouvement, et c'est en résistant qu'il en reçoit; de plus, il en reçoit précisément autant qu'il en détruit dans celui qui agit sur lui : de même qu'un vase (pour me servir des expressions de Laplace) se remplit aux dépens d'un vase plein qui communique avec lui. En un mot, la résistance que les corps opposent au mouvement n'est qu'un effet qui dérive de ce principe général, l'*action est égale et opposée à la réaction*. Nous nommerons *Inertie* cette résistance que les corps en repos opposent au mouvement, et comme elle est égale à $M'v$, on voit que l'*inertie est proportionnelle à la masse, et par conséquent au poids du corps*, bien qu'elle soit entièrement indépendante de la gravité.

3°. Si les corps M et M' ont des masses égales, et vont en sens contraire, on a $v = \frac{1}{2}(V - V')$, ainsi la vîtesse après le choc est la moitié de la différence entre les vîtesses imprimées; elle est de plus dirigée dans le sens du plus prompt des deux mobiles.

4°. Le centre de gravité du système de deux points matériels qui se choquent jouit d'une propriété intéressante, qui tient aux grands principes de la Mécanique, et qu'on a nommée *Conservation du centre de gravité :* voici en quoi elle consiste. Prenons sur la droite que décrivent les corps un point quelconque pour origine des espaces, nommons e et e' les distances des deux corps à ce point au bout du tems t, et X celle de leur centre de gravité; on a (54, A'), $X = \frac{Me + M'e'}{M + M'}$. On a

d'ailleurs pour les vîtesses dont ces corps sont animés avant le choc $V = \frac{de}{dt}$, $V' = \frac{de'}{dt}$; à ce même instant, la vîtesse du centre de gravité est $\frac{dX}{dt}$ ou $\frac{MV + M'V'}{M + M'}$; et comme cette valeur est celle de la vîtesse v des deux corps après le choc, on voit que la vîtesse du centre de gravité est la même avant et après le choc. Nous verrons (260) que ce théorême n'est qu'un cas particulier d'un autre qui est relatif au mouvement d'un système quelconque de corps.

220. Nous avons supposé, dans tout ce qui vient d'être dit, que les corps choquans étoient animés de vîtesses constantes : or s'il n'en étoit pas ainsi, on chercheroit, d'après les principes exposés précédemment (153), le tems et le lieu de leur rencontre, ainsi que les vîtesses dont ils sont animés à cet instant : il suffit pour cela de connoître les positions et les vîtesses initiales des corps, ainsi que les forces accélératrices qui les sollicitent. Par là, on retomberoit dans le cas précédent, et on pourroit facilement déterminer la vîtesse des corps après le choc.

221. Nous avons trouvé (d, 150) pour la valeur de la force accélératrice $\varphi = \frac{dv}{dt}$; mais nous supposions alors que les puissances agissoient sur le même corps ou sur des masses égales. Maintenant les forces ne sont plus proportionnelles aux simples vîtesses, mais bien aux quantités de mouvement ; et nous ne pouvons plus introduire, dans les problêmes où il s'agira d'examiner l'action des divers corps, la simple quantité φ, mais bien le produit $m\varphi$ de la force accélératrice ϕ par la masse m sur laquelle elle agit. En effet, on a $dv = \varphi dt$, et pour l'élément de la quantité

de mouvement $mdv = m\varphi dt$; c'est cette quantité qui mesure l'accroissement de la force dont le corps m est animé. Celui d'un autre corps m', sollicité par la force φ', seroit de même $m'dv' = m'\varphi' dt$. Pour que ces forces soient égales, on doit avoir $m\varphi dt = m'\varphi' dt$, ou $m\varphi = m'\varphi'$. Ainsi on voit que le produit $m\varphi$ mesure l'intensité de la force φ, comme mv mesure celle de la masse m animée de la vitesse v. On nomme la quantité $m\varphi$ FORCE MOTRICE ; *c'est le produit de la force accélératrice par la masse qu'elle anime :* de sorte que réciproquement pour avoir la force accélératrice, lorsqu'on connoît la force motrice, il faut diviser celle-ci par la masse.

222. Nous venons de faire voir qu'on a $m\varphi dt$ pour l'élément de la quantité de mouvement : c'est cette valeur qui sert de mesure à la force d'un corps qui n'a encore qu'une vitesse naissante. Ainsi lorsqu'un corps m posé contre un obstacle est soumis à l'action de la force φ, $m\varphi dt$ est la valeur de la *pression* qu'il exerce : pareillement $mgdt$ est le *poids* du corps m, g étant la gravité. On voit que les pressions ne peuvent être comparées aux chocs, et qu'elles sont infiniment petites par rapport à eux : de sorte qu'on ne peut mesurer par des poids la force des corps en mouvement. C'est pourquoi un clou entre assez avant dans un corps lorsqu'on le frappe, tandis qu'un poids assez considérable ne produit rien.

Comme on ne doit comparer que des pressions entr'elles, il est alors inutile de prendre pour leur mesure la quantité $m\varphi dt$, et on peut employer $m\varphi$, puisque dt disparoît dans le rapport $\frac{m\varphi dt}{m'\varphi' dt}$. Ainsi lorsqu'on cherche le poids p d'un corps, il est visible qu'on n'a pour but que de trouver parmi les corps connus celui qui exerce la même

pression verticale que celui-là : prenons, par exemple, des corps dont m' soit la masse, et supposons qu'il faille un nombre k de ces corps pour mettre en équilibre le poids p à l'aide d'une balance : il est clair qu'alors les pressions $mgdt$ et $km'gdt$ que ces corps exercent sur les deux plateaux de la balance sont égales, et que $mg = k.m'g$. Soit pris $m'g$ pour unité (ce qui arrive lorsque le corps m' est un gramme ou un kilogramme, etc.), alors $mg = k$, et k est ce qu'on appelle le *Poids absolu* du corps, c'est-à-dire, le nombre de grammes qui exercent la même pression verticale. Les forces que nous avons considérées en Statique, ne sont, à proprement parler, que de simples pressions, puisqu'elles s'entredétruisent.

223. Passons maintenant au choc direct des *Corps élastiques*, et avant tout examinons les circonstances physiques qui accompagnent le choc des corps à ressort. Lorsqu'un corps élastique va choquer un plan dur et inébranlable, l'effet du choc force ce corps à changer de figure; il s'*aplatit* en se comprimant jusqu'à ce que la réaction du plan choqué ait éteint son mouvement. C'est alors que commence le phénomène de l'élasticité. On doit le regarder comme produit par une force qui, agissant de l'intérieur du corps vers l'extérieur, repousse les molécules que la compression a déplacées, pour les remettre dans leur état primitif. Il arrive donc que le corps se *rétablit*; et si son ressort est parfait, la force avec laquelle ce rétablissement s'opère est égale et opposée à celle de la compression. Le plan sert alors d'appui; à mesure que le corps reprend sa figure, toutes ses parties reçoivent une impulsion en sens contraire de celui du choc; il repousse donc le plan, ou, ce qui revient au même, il en est repoussé, et par conséquent il retourne en arrière.

Appliquons ces considérations au choc de deux corps

élastiques M et M', qui sont animés des vîtesses V et V' dirigées dans le même sens. M poursuit M', et lorsque ces deux mobiles se rencontrent (ce qui exige qu'on ait $V > V'$), ils se pressent mutuellement jusqu'à ce qu'ils aient acquis une vîtesse commune v : alors M a perdu la vîtesse $V - v$, tandis qu'au contraire M' a gagné la vîtesse $v - V'$. Dans cet état les corps ne se pressent plus, ils sont simplement juxtà-posés, et ils ont atteint leur maximum de compression. Jusqu'ici la force de restitution n'a point été mise en jeu, et il est clair que tout s'est passé comme si les corps avoient été durs : de sorte que la vîtesse v, qui est commune aux deux corps, n'est autre que celle dont nous connoissons déja la valeur (b'').

Mais tout-à-coup là restitution s'opère ; les corps ne restent même qu'un instant infiniment court, dans cet état *stationnaire* qui sépare l'instant de la compression de celui du rétablissement. Nous avons dit que l'élasticité devoit être considérée comme une force agissant dans l'intérieur des corps vers l'extérieur : dans l'état où sont nos deux corps, juxtà-posés et sans pression mutuelle, cette force exerce son action dans chacun d'eux, et son intensité est la même que celle avec laquelle ils se sont comprimés, à cause du ressort supposé parfait. On voit donc que le corps M' sera poussé par l'élasticité de M dans le sens de la tendance commune, et par conséquent devra gagner de nouveau la vîtesse $v - V'$: tandis qu'au contraire le corps M sera repoussé en arrière par l'élasticité de M', et devra perdre encore la vîtesse $V - v$. Ainsi M aura perdu la vîtesse $2(V - v)$, et M' aura gagné celle $2(v - V')$: donc en désignant par u et u' les vîtesses de M et M' après le choc, on a $u = V - 2(V - v)$, et $u' = V' + 2(v - V')$; ou

$$u = 2v - V, \quad u' = 2v - V' \ldots\ldots (d'').$$

La valeur de v est d'ailleurs connue par l'équation (b''). On peut la substituer ici, et il vient

$$u=\frac{V(M-M')+2M'V'}{M+M'}, u'=\frac{-V'(M-M')+2MV}{M+M'}.$$

Ces formules font voir que si les masses sont égales, les mobiles échangent leurs vîtesses dans le choc, et continuent ensuite de se mouvoir dans le même sens; car $M=M'$ donne $u=V'$, et $u'=V$.

224. Quand les deux mobiles vont en sens contraire, il suffit de changer dans ces formules le signe de V'; ce dont on peut se convaincre en reprenant tout le raisonnement ci-dessus. Le cas présent conduit à plusieurs conséquences.

1°. Si les vîtesses sont égales, comme alors $V'=-V$, on a $u=\frac{M-3M'}{M+M'}\times V$, et $u'=\frac{3M-M'}{M+M'}\times V$. On en conclut que M' arrêtera un corps de masse triple, et qu'il reculera lui-même avec une vîtesse double; car $M=3M'$ donne $u=0$, et $u'=2V$.

2°. Chacun des corps M et M' s'arrêtera, continuera sa route ou rebroussera chemin, suivant que l'on aura, savoir:

pour M ... $VM=$, ou $>$, ou $<M'(V+2V')$,
pour M' ... $V'M'=$, ou $>$, ou $<M(V'+2V)$.

3°. Si les masses sont égales, les deux mobiles rebrousseront chemin après avoir échangé leurs vîtesses; car $M=M'$ donne $u=-V'$ et $u'=V$.

225. Enfin si le corps M' est en repos, il est de même facile de voir qu'il suffit de faire $V'=0$ dans nos formules, ce qui donne

$$u=\frac{V(M-M')}{M+M}, \text{ et } u'=\frac{2MV}{M+M'}.$$

Tirons de là quelques conséquences.

1°. Si les masses sont égales, le corps choquant devra rester en repos, et le corps choqué se mouvra avec la vîtesse qu'avoit le premier. Car $M = M'$ donne $u = 0$, et $u' = V$.

Donc si plusieurs corps élastiques $A, B, C, D, \ldots N, P, Q$, ont des masses égales, juxtà-posées, et en repos; puis si on communique au premier corps A la vîtesse V, tous les mobiles B, C, ... devront rester en repos, excepté le dernier Q qui aura la vîtesse V. Car le corps A communiquera cette vîtesse à B, qui à son tour, la donnera à C, etc. De même si on donne à-la-fois aux deux corps A et B la vîtesse V; C, D, ... resteront en repos; et P et Q prendront cette vîtesse par le choc : et ainsi de suite.

2°. Si la masse du corps choquant est la plus grande, les deux mobiles devront aller dans le même sens que lui, car lorsqu'on a $M > M'$, u et u' sont positifs.

3°. Enfin si la masse du corps choquant est la plus petite, il rebroussera chemin, et le corps choqué se mouvra dans la direction que celui-là avoit avant le choc; puisque $M' > M$ donne u négatif et u' positif.

226. Quelqu'hypothèse qu'on fasse d'ailleurs sur les grandeurs et les directions de V et V', il y a deux conséquences remarquables.

1°. On a donné le nom de *force vive*, au produit de la masse par le quarré de la vîtesse : cette dénomination doit son origine à une discussion relative à la manière dont on devoit évaluer la force d'un corps en mouvement : nous ne nous y sommes point arrêtés, parce qu'on est d'accord à ce sujet, et que la dispute ne rouloit que sur des mots. Nous nous contenterons d'observer que la formule (d'),

dans laquelle la masse est prise pour unité, est la valeur de la force vive.

Dans le choc des corps élastiques la force vive est la même avant et après le choc, c'est-à-dire, que $Mu^2 + M'u'^2 = MV^2 + M'V'^2$. En effet les formules précédentes (d'') donnent

$$Mu^2 + M'u'^2 = M(2v - V)^2 + M'(2v - V')^2$$
$$= 4v^2(M + M') - 4v(MV + M'V') + MV^2 + M'V'^2.$$

Les deux premiers termes de ce dernier membre se détruisent d'après la valeur de v, (b''); ce qui démontre le théorême proposé.

2°. Les valeurs (d'') deviennent $u = 2v - V$, $u' = 2v \pm V'$ en cumulant ensemble tous les cas possibles : ce qui fait voir que le théorême précédent a toujours lieu ; et qu'après le choc *la vîtesse relative*, ou $u - u'$, est $= -(V \pm V')$; or $V \pm V'$ est la vîtesse relative avant le choc ; donc *les vîtesses relatives, avant et après le choc, sont égales et dirigées en sens contraires :* ou, ce qui revient au même, *à des instans égaux pris avant et après le choc, les mobiles sont à la même distance l'un de l'autre.*

II. *Choc oblique des corps à ressort.*

227. D'après ce que nous avons dit dans la note du n°. 204, il ne nous reste rien à ajouter sur le choc oblique des corps durs. Soit donc CD un plan fixe, et A un mobile à ressort parfait, lancé avec la vîtesse AF : décomposons cette vîtesse en deux autres, dont l'une FI soit perpendiculaire au plan, et dont l'autre CF soit dirigée dans le sens du plan. Celle-ci n'éprouve aucun obstacle à son effet entier; quant à l'autre, si elle existoit seule, l'élasticité devroit communiquer au mobile de F vers I,

Fig. 111.

la vîtesse FI; ainsi lorsque le mobile est parvenu en F, il est soumis à l'action de deux forces qui lui communiquent les vîtesses FI et $FD = FC$; ainsi il aura dans la direction FB la vîtesse FK. On nomme AFI l'angle d'incidence, et KFI l'angle de réflexion; comme les deux rectangles CF et ID sont égaux, il est visible que ces angles le sont aussi. Donc *lorsqu'un corps à ressort parfait vient choquer un obstacle, il se réfléchit en faisant l'angle de réflexion égal à l'angle d'incidence.*

Si le mobile alloit choquer une surface courbe ou une courbe, il faudroit concevoir au point de contact un plan tangent, ou une tangente, et y appliquer ce qui vient d'être dit. Comme le son, la lumière, etc. rentrent dans la théorie des corps à ressort parfait, on voit à quoi tiennent les propriétés des miroirs paraboliques et elliptiques, des cornets acoustiques, etc.

228. Voici divers problêmes qu'on peut se proposer sur le choc oblique des corps à ressort : on pourroit les résoudre analytiquement; mais nous nous contenterons d'en trouver les solutions graphiques.

I. *Trouver en quel point* F *d'un plan* CD, *on doit faire choquer un mobile placé en* A, *pour qu'il aille rencontrer un corps placé en* B. Fig. 111.

Menons AH perpendiculaire sur CD; prenons $AC = CH$; menons HB, le point F de rencontre de cette droite avec CD sera le point cherché. En effet les triangles ACF et HCF étant égaux, on en conclut qu'il y a égalité entre les angles AFC, CFH et DFK : donc, etc. Au jeu de billard on appelle *Bricoller* toucher une bille placée en B, après avoir frappé la bande CD.

II. *Résoudre le même problême par une double bricolle.*

Fig. 111 bis. A est le corps choquant, B le corps qu'on veut toucher ; menons AH perpendiculaire sur IL ; prenons $AI = IH$; menons FH parallèle à LI, et rencontrant KL en G ; prenons $GH = FG$; enfin menons FB, et par les points C et H la droite CH ; les points D et C seront ceux où le corps A doit choquer IL et LK. En effet les angles ADI et CDL sont égaux à l'angle IDH ; de même les angles FCG, GCH et BCK sont égaux.

Fig. 112. III. *Etant données les deux sphères ou billes égales* A *et* L, *faire ensorte que celle-ci étant choquée par la première, aille en* C ; *trouver la direction du mouvement de la bille* A *après le choc.*

Menons CL par le point C et le centre de la bille L ; faisons toucher la bille A au point I où la surface est rencontrée par CL. Il est clair que si on prolonge CL en B, et que si on abaisse sur BI la perpendiculaire ID, la force AI équivaudra aux forces BI et ID qu'on trouve en formant le rectangle BD. La première est entièrement employée à faire mouvoir la bille I, et à lui donner la vîtesse BI, (225, 1°.). La deuxième ne contribue pas au choc ; elle a donc son entier effet, et EI sera la direction de la bille A après le choc ID ; puisque la vîtesse BI est tout-à-fait détruite et que l'autre n'est nullement altérée.

III. *Principe de d'Alembert.*

229. Le célèbre d'ALEMBERT a donné une méthode directe et générale pour résoudre, ou du moins pour mettre en équation, tout problême de dynamique ; il a réduit toutes les lois du mouvement des corps à celles de leur équilibre, et ramené ainsi la dynamique à la statique. Il étoit réservé à cet homme d'un génie su-

périeur d'envisager d'une manière générale la science du mouvement, et cependant de la réduire aux combinaisons les plus simples et à l'analyse ordinaire. Avant lui, Jacques Bernoully avoit déja traité d'une manière à-peu-près semblable quelques problêmes de Dynamique. Voici à quoi revient le théorême connu sous le nom de *Principe de d'Alembert.*

Concevons un système de corps sollicités par des forces quelconques ; la liaison de ces corps contraindra chacun d'eux à prendre un mouvement différent de celui qu'il auroit pris s'il eût été libre : or si on introduit de nouvelles forces, qui, agissant sur chaque corps en sens contraire de son mouvement, soient capables de le détruire, il y aura équilibre ; d'où il suit que *dans tout système les quantités de mouvement imprimées, et celles qui ont lieu prises en sens opposé, doivent se faire mutuellement équilibre, en ayant égard à la nature du système.*

Ce principe porte avec soi un caractère d'évidence et de simplicité qui lui est propre ; il est d'ailleurs précieux par sa très-grande généralité : car il est évident qu'en exprimant par des équations la liaison des parties du système, ainsi que l'équilibre entre les forces imprimées, et celles qui ont lieu prises en sens opposé ; on aura des expressions analytiques propres à faire connoître celles-ci, et par conséquent le mouvement de chaque corps. C'est ce qui sera rendu plus clair par les applications que nous allons en faire. Commençons d'abord par des cas fort simples.

230. *Choc des corps durs.* Soient deux mobiles M et M' animés des vîtesses V et V', quelle est leur vîtesse commune v, après le choc ? On suppose que les vîtesses ont le signe positif, c'est-à-dire, que les deux corps se meuvent dans le même sens. D'après cet exposé, il sera facile de former le tableau suivant.

masses.	vîtesses imprimées.	vîtesses effectives.
M	V	v
M'	V'	v.

D'où on voit que si, à l'instant où le choc s'opère on imprimoit en sens contraire à chaque masse la vîtesse v, il y auroit équilibre; les forces qui se détruisent sont donc

$$MV,\ M'V',\ -Mv \text{ et } -M'v.$$

Or pour l'équilibre on a vu (217) que la somme des quantités de mouvement, prises avec leurs signes, devoit être nulle; donc on a $MV+M'V'-(M+M')v=0$, d'où on tire l'équation (b''). On résoudroit avec la même facilité le cas où les mobiles vont en sens contraire, ou celui où M' est en repos : mais il est évident que cela revient à changer le signe de V', ou à faire $V'=0$.

231. *Choc des corps à ressort parfait.* M et M' sont deux corps élastiques, animés des vîtesses V et V'; il s'agit de trouver leurs vîtesses u et u' après le choc. Le tableau précédent devient ici

masses.	vîtesses imprimées.	vîtesses effectives.
M	V	u
M'	V'	u'.

Si donc à l'instant où le choc s'opère, on imprime en sens contraire les vîtesses u et u', l'équilibre devra s'établir, pourvu que les corps perdent tout-à-coup leur ressort. La somme des quantités de mouvement est donc nulle, et on a $MV+M'V'-Mu-M'u'=0$. Cette équation ne suffit pas pour déterminer u et u'; mais la nature du système en fournit une autre : car l'élasticité des deux corps étant parfaite, comme la force de leur choc dépend de leurs vîtesses relatives, et que la force de restitution est

égale à celle de leur compression ; il est facile de voir *à priori*, que les vîtesses relatives sont égales et opposées avant et après le choc : ainsi on a $u - u' = V' - V$. En éliminant entre ces deux équations, on obtient pour u et u' les valeurs déja trouvées (223).

232. *Mouvement sur la poulie.* Soient m et m' les masses de deux poids P et Q unis par un cordon non pesant passé dans la gorge d'une poulie BFC ; cherchons les circonstances de leur mouvement. Soit v la vîtesse avec laquelle le corps m' monte et le corps m descend ; cette vîtesse est prise positivement pour les deux corps, parce que comme la poulie ne sert ici qu'à changer les directions des forces, on peut regarder comme positives les directions qui sont dans le sens $m'CFBm$, comme s'il ne s'agissoit que d'une droite. La gravité g qui sollicite les deux corps leur a déja, au bout du tems t, communiqué la vîtesse v ; et dans l'instant suivant, elle imprime à chacun d'eux la vîtesse gdt ; mais l'une de ces impulsions est dirigée dans le sens du mouvement de m, tandis que pour m' l'autre a lieu dans un sens opposé. Si donc le fil venoit à se rompre au bout du tems t, les vîtesses de m et m' seroient $v + gdt$, et $v - gdt$ dans l'instant suivant. Or par la liaison du système, la vîtesse devient pour tous deux $v + dv$; et on a Fig. 113.

masses	vîtesses impr.	vîtessses effectives.
m	$v + gdt$	$v + dv$.
m'	$v - gdt$	$v + dv$.

D'ailleurs, pour l'équilibre entre les forces imprimées et celles qui ont lieu prises en sens contraire, il faut (217) que la somme des quantités de mouvement (prises avec leurs signes) soit nulle ; ce qui donne

$m(v+gdt)+m'(v-gdt)-m(v+dv)-m'(v+dv)=0$,

ou plutôt en réduisant $(m-m')\,gdt-(m+m')\,dv=0$, d'où on tire

$$v=\frac{m-m'}{m+m'}\cdot gt+C$$

$$e=\frac{m-m'}{m+m'}\cdot\tfrac{1}{2}gt^2+Ct+E.$$

ce qui prouve que le mouvement est uniformément varié. Comme les poids sont proportionnels aux masses (50), on peut visiblement remplacer ici m et m' par P et Q. La même chose a également lieu dans les problèmes suivans.

Il se présente ici deux cas, suivant qu'on a originairement laissé partir les mobiles du repos en les abandonnant à la seule gravité, ou qu'on a donné à l'un d'eux une impulsion qui a fait prendre aux deux corps une vitesse initiale.

233. Dans le premier cas on a visiblement $C=0$; et si on compte les e à partir du point de départ de chaque corps, on a aussi $E=0$; ce qui donne

$$e=\frac{m-m'}{m+m'}\cdot\tfrac{1}{2}gt^2,\quad v=\frac{m-m'}{m+m'}\cdot gt.\ldots.(e'').$$

Athood, physicien anglais, déduisit de ces formules un moyen de vérifier tout ce qui a été exposé précédemment sur la nature et les effets de la gravité, sur le choc des corps durs, etc. Il conçut une machine, dont nous ne pouvons donner ici tout le détail, mais qui est fondée sur le principe suivant : soit une poulie BFC, et deux poids P et Q, unis par un cordon $mBFCm'$; les valeurs ci-dessus font voir que si on rend ces poids très-peu différens, les valeurs de la vitesse v et de l'espace e décrit

Fig. 113.

dans le tems t, pourront être rendues assez petites pour qu'on puisse les mesurer, en observant la chute de deux corps. Athood a d'ailleurs rendu cette machine susceptible d'une très-grande précision, 1°. en faisant porter l'axe de la poulie sur des rouleaux mobiles, afin d'en diminuer le frottement (131); 2°. en suspendant les poids P et Q à des soies très-fines, afin que celui des deux corps qui a de son côté une plus grande longueur de ce fil n'ait pas son poids sensiblement augmenté; 3°. en ajoutant au système une horloge sonnant les secondes, etc. Il s'est servi de cette machine pour mesurer la gravité g dont nous avons précédemment trouvé la valeur (195, 4°.).

234. Dans le second cas si, au lieu d'abandonner simplement les corps à la gravité, on a imprimé de haut en bas à P l'impulsion V; cette vîtesse a dû être répartie entre les deux masses m' et m, suivant la même loi que si m choquoit avec la vîtesse V le corps m' en repos: ainsi la vîtesse commune aux deux poids est $\frac{mV}{m+m'}$, (c''). Telle sera la valeur de la vîtesse lorsqu'on compte $t=0$, ou plutôt celle de la constante C; donc

$$v = \frac{mV+(m-m')gt}{m+m'} \ldots\ldots (f'').$$

On déduira aisément de là e en fonction de t.

Nous ajouterons ici une observation importante. Si on a $m'>m$, $(m-m')gt$ est négatif; or tant qu'on aura $mV>(m'-m)gt$, v sera positif. Ce qui fait voir que l'impulsion V l'emportera toujours, pendant un certain tems, sur l'action de la pesanteur, quelque grand que puisse être d'ailleurs m' par rapport à m: on détermine ce tems par l'équation $mV=(m'-m)gt$. On voit donc

qu'il n'y a pas d'impulsion, si petite qu'elle soit, qui ne puisse vaincre le poids d'un corps : ce qui confirme ce que nous avons déja avancé (150, 222), que la force des corps en mouvement ne peut être mesurée par des poids, et qu'on ne peut comparer la percussion à la pression.

La solution précédente s'applique encore à une autre question intéressante, mais de la même nature. Supposons
Fig. 89. que le poids Q surpasse le poids P, ou qu'on ait $m' > m$, et que Q étant posé sur un plan horisontal, le mouvement soit produit par une impulsion donnée à m de haut en bas. Il est clair que toute l'analyse précédente s'applique ici, et que l'équation (f'') a encore lieu : elle devient donc

$$v = \frac{mV - (m' - m)gt}{m + m'}.$$

On voit que P entraîneroit d'abord Q, mais que la vîtesse, diminuant de plus en plus, seroit nulle lorsqu'on auroit $mV = (m' - m)gt$; ensuite le poids Q l'emporteroit à son tour. Il seroit très-facile de déterminer quelles valeurs de e répondent à ces circonstances.

Fig. 49. 255. *Mouvement sur les plans inclinés adossés.* Supposons que AC et CB sont deux plans inclinés adossés, faisant avec l'horison les angles ε et ε', et que deux masses m et m', unies par un fil mCm', passé sur la poulie C, sont soumises à la gravité; elles agissent alors l'une sur l'autre : cherchons les circonstances du mouvement.

Au bout du tems t, m aura la vîtesse v, dirigée de m vers A, et la pesanteur lui imprimeroit, dans l'instant dt suivant, la vîtesse verticale gdt si ce corps étoit libre; or la vîtesse sera en effet $v + dv$; on a donc, en comptant les vîtesses positives dans le sens $m'Cm$,

masses	v. imprimées	v. qui auront lieu.
m	v ... gdt	v ... $v + dv$
m'	v ... gdt	v ... $v + dv$.

Donc si on imprimoit aux masses m et m' ces dernières vîtesses en sens contraire, il y auroit équilibre. Pour exprimer cette condition, rappelons-nous qu'il faut pour cela que la somme des composantes des forces, dans le sens des plans, soit nulle, en prenant chacune avec le signe qui lui appartient. Cette somme (en supprimant tous les termes affectés de v qui s'entredétruisent) est

$$mg \sin \iota \, dt - m'g \sin \iota' \, dt - (m + m') \, dv;$$

en égalant à zéro, on obtient donc

$$dv = \frac{m \sin \iota - m' \sin \iota'}{m + m'} \, gdt,$$

on en tire aisément

$$v = \frac{m \sin \iota - m' \sin \iota'}{m + m'} \, gt, \quad e = \frac{m \sin \iota - m' \sin \iota'}{m + m'} \cdot \tfrac{1}{2} gt^2.$$

Ainsi le mouvement est encore uniformément varié. Nous n'ajoutons pas ici de constantes, parce que nous supposons que l'on n'a pas donné d'impulsion initiale, et que les e sont comptés à partir du point de départ de chaque corps. S'il en étoit autrement, il seroit facile d'opérer comme dans les problêmes précédens. En faisant ici $\iota = \iota' = \frac{1}{2}\pi$, on trouve les résultats que nous avons déja obtenus (233).

236. *Mouvement sur le Treuil.* Concevons deux poids P et Q appliqués, le premier à la roue GF, le second au cylindre DC d'un treuil : soient m et m' leurs masses; $r = DC$ le rayon du cylindre, $R = CF$ celui de la roue, Fig. 114.

et v la vitesse de m au bout du tems t : comme les circonférences sont proportionnelles aux rayons, et que les vîtesses de m et de m' sont dans le rapport des circonférences, il est clair que $\frac{r}{R} \cdot v$ sera celle de m'. Si les corps devenoient libres tout-à-coup, dans l'instant dt suivant la gravité communiqueroit à chacun d'eux l'impulsion gdt; de sorte qu'en comptant les vîtesses positives dans le même sens, ainsi qu'on l'a fait dans les problêmes précédens, $v + gdt$ et $\frac{rv}{R} - gdt$ seroient les vîtesses respectives de m et de m'. Or par la liaison du système il n'en est pas ainsi, et on a

masses	v. imprim.	v. effectives	distances à l'axe.
m	$v + gdt$	$v + dv$	R
m'	$\frac{rv}{R} - gdt$	$\frac{r}{R}(v + dv)$	r.

En prenant les vîtesses effectives en sens contraires, il y auroit donc équilibre dans le système, ce qui exige que la somme des momens (110, 42) des quantités de mouvement, par rapport à l'axe, soient égaux, en prenant ces momens avec leurs signes. Ainsi on a, en supprimant les termes affectés de v qui s'entredétruisent

$$mR.gdt - m'rgdt - mRdv - m'.\frac{r^2}{R}dv = 0,$$

d'où on tire

$$dv = \frac{mR^2 - m'Rr}{mR^2 + m'r^2} \cdot gdt;$$

le mouvement est donc encore uniformément varié. Il seroit donc facile de déduire de là l'équation du mouve-

ment de m et sa vîtesse, et par suite les mêmes choses pour m'; ce qui n'a aucune difficulté.

237. Jusqu'ici nous avons fait abstraction du *poids des cordons;* il ne seroit guère plus difficile d'y avoir égard. En effet, prenons d'abord le cas de la poulie; représentons par p la masse de l'unité de longueur du cordon, et par a sa longueur entière diminuée de la partie BFC; soit z la longueur Bm de la partie de ce cordon qui est du côté du poids P; $a - z$ sera Cm', c'est-à-dire, celle qui est de l'autre côté au bout du tems t: les poids respectifs de ces cordons sont donc pz et $p(a-z)$. En raisonnant comme ci-dessus (232), on verra qu'on a Fig. 113.

masses	v. imprimées	v. effectives.
$m + pz$	$\ldots\ldots v + gdt$	$\ldots\ldots v + dv$
$m' + p(a-z)$	$\ldots\ldots v - gdt$	$\ldots\ldots v + dv.$

L'équilibre entre les forces imprimées et les forces effectives, prises en sens opposé, donne

$$dv = \frac{m - m' + p(2z - a)}{m + m' + pa} \cdot gdt.$$

On intègre cette équation en la multipliant par $vdt = dz$, et on trouve, tout calcul fait,

$$v^2 = 2g \times \frac{(m - m' - pa)z + pz^2 + C}{m + m' + pa}.$$

Lorsque la vîtesse est nulle en même tems que z, on a $C = 0$: on détermineroit aisément dans tout autre cas la valeur de la constante C. En mettant pour v sa valeur $\frac{dz}{dt}$, pour obtenir une relation entre z et t, il ne s'agit plus que d'intégrer une fonction de la forme.....

$Adt = \dfrac{dz}{\sqrt{\{\alpha + \zeta z + \gamma z^2\}}}$, ce qui n'offre aucune difficulté.

Le mouvement sur le treuil, en ayant égard aux poids des cordons, se traite absolument de même : conservons
Fig. 114. les notations du n°. 236 : de plus nommons l et n les longueurs des cordons lorsque $t = 0$; et z la longueur de cordon qui se développe de dessus la roue durant le tems t. L'autre cordon s'enveloppera en même tems sur le cylindre d'une longueur $\frac{r}{R} z$. Ainsi les cordons auront pour longueurs au bout du tems t, $Fm = l + z$, et $Dm' = n - \frac{r}{R} z$: leurs masses seront $p(l+z)$, et $p(n - \frac{r}{R} z)$; et on aura

masses.	v. impr.	v. effectives.
$m + p(l+z)$	$v + gdt$	$v + dv$
$m' + p(n - \frac{r}{R} z)$	$\frac{rv}{R} - gdt$	$\frac{r}{R}(v + dv)$

Il suffira donc de remplacer, dans les calculs du n°. 236, m et m' par $m + p(l+z)$ et $m' + p(n - \frac{r}{R} z)$; on obtiendra une expression de la forme $dv = \frac{\alpha + \zeta z}{\alpha' + \zeta' z} \times dt$, qu'on intégrera comme ci-dessus, après l'avoir multipliée par $vdt = dz$. Nous ne pousserons pas plus loin ces calculs qui n'appartiennent plus à la Mécanique.

238. Dans l'article précédent, nous avons fait abstraction de l'inertie de la poulie; or, dans le mouvement dont nous venons de parler, la gravité, dont les effets sur la

poulie sont détruits par l'axe fixe, n'en emploie pas moins une partie de son action sur les poids, pour imprimer à cette machine un mouvement de rotation (219, 2°.). Réparons cette omission volontaire.

Tout ce que nous avons dit dans le n°. précédent de l'action de la pesanteur sur les masses m et m' et sur les cordons, a également lieu ici, et il n'y a rien à changer. Mais en outre remarquons que toutes les particules de la poulie ont un mouvement commun de rotation, et que la vîtesse des points de la circonférence est celle des poids P et Q; de sorte qu'elle est $= v$, au bout du tems t. Mais les particules qui sont plus voisines de l'axe ont une vîtesse moindre, et la diminution se fait dans le rapport des circonférences qu'elles décrivent, ou plutôt de leurs distances à l'axe; de sorte que si nous considérons des molécules dont les masses soient μ', μ'', ... distantes de l'axe de ϱ', ϱ'', ... en nommant r le rayon de la poulie, leurs vîtesses (211) seront $\frac{\varrho' v}{r}$, $\frac{\varrho'' v}{r}$, ... La pesanteur n'exerce d'ailleurs aucune action sur elles, et au bout du tems $t + dt$, on a

Fig. 112.

masses.	v. imprimées.	v. effect.	dist. à l'axe.
$m + pz$	$v + gdt$	$v + dv$	r
$m' + p(a - z)$	$v - gdt$	$v + dv$	r
μ'	$\frac{\varrho'}{r} v$	$\frac{\varrho'}{r}(v + dv)$	ϱ'
μ''	$\frac{\varrho''}{r} v$	$\frac{\varrho''}{r}(v + dv)$	ϱ''
etc.	etc.	etc.	etc.

Pour l'équilibre entre les forces imprimées et les forces effectives prises en sens contraire, il faut que la somme

des momens de ces quantités de mouvement par rapport à l'axe (42) soit nulle, et on a

$$[m-m'+p(2z-a)]gdt=dv\left\{m+m'+pa+\frac{\Sigma(\mu\rho^2)}{r^2}\right\},$$

en désignant par $\Sigma(\mu\rho^2)$ la somme des termes . . . . . $\mu'\rho'^2+\mu''\rho''^2+$ etc., c'est-à-dire, la somme des produits des molécules par les quarrés de leurs distances à l'axe; de sorte qu'en multipliant cette équation par $dz=vdt$, et intégrant, on obtient

$$v^2=\frac{(m-m'-pa)z+pz^2}{r^2(m+m'+pa)+\Sigma(\mu\rho^2)}\times 2gr^2.$$

Le reste n'a plus de difficulté. Quant à la valeur de la quantité $\Sigma(\mu\rho^2)$, nous allons nous occuper des moyens de la trouver, non-seulement pour une poulie de dimensions connues, mais encore pour un corps et un axe quelconques, parce que par la suite nous en aurons fréquemment besoin.

IV. *Moment d'inertie.*

239. Soient m', m'', m''', ... les masses des molécules d'un corps de figure connue; ρ', ρ'', ρ''', ... leurs distances à un axe quelconque : on a nommé MOMENT D'INERTIE, la quantité

$$m'\rho'^2+m''\rho''^2+m'''\rho'''^2+\text{etc.}=S(m\rho^2).$$

C'est, comme on voit, *la somme des produits des masses des molécules du corps, par les quarrés de leurs distances à l'axe.* Comme nous supposerons que ce corps est homogène, il faut remplacer, dans tout ce qui va être dit, les masses des molécules par leurs volumes qui leur sont proportionnels.

Nous allons donner des règles générales pour obtenir la valeur du moment d'inertie, pour un corps et un axe connus; et nous les appliquerons à quelques cas particuliers qui nous seront utiles par la suite. Pour cela observons que la quantité $S(mg^2)$ ne dépend que de la forme du corps et de la position de l'axe; de sorte que comme elle est indépendante du tems, elle peut être considérée à part, en faisant abstraction de toute idée de mouvement: en un mot cette fonction est purement géométrique. Soient x', y'; x'', y''; ... les coordonnées des molécules m', m'', ... de ce corps en regardant l'axe donné comme étant celui des z. On a $g'^2 = x'^2 + y'^2$: etc.; et

$$S(mg^2) = m'(x'^2+y'^2)+m''(x''^2+y''^2)+\text{etc.} = S.m(x^2+y^2)\ldots(g'').$$

Ainsi, pour trouver le moment d'inertie d'un corps par rapport à l'axe des z, on évaluera la formule précédente, d'après la disposition particulière des molécules de ce corps; c'est-à-dire, qu'on évaluera le volume d'une molécule m en fonction des différentielles de ses coordonnées x, y et z, et qu'on intégrera dans toute l'étendue du corps la quantité $m(x^2+y^2)$, ce qui n'a, comme on voit, aucune difficulté. Mais il arrive très-souvent que l'axe par rapport auquel on cherche le moment d'inertie, n'est pas celui des z, ou, si on veut, que l'équation qui détermine la forme du corps n'a pas pour axe des z celui par rapport auquel on cherche le moment d'inertie. Dans ce cas, cette équation ne peut être combinée avec la formule précédente, puisque ces deux expressions ne sont pas rapportées à la même origine des coordonnées. L'emploi de l'équation précédente exige donc dans ce cas la résolution de ce problème: *étant donné le moment d'inertie par rapport à une droite, trouver ce moment par rapport à une autre droite quelconque.*

240. Nous ne résoudrons ce problême que pour le cas où ces droites sont parallèles, parce qu'il suffit à nos besoins. Supposons donc qu'on connoît le moment d'inertie par rapport à l'axe des z, perpendiculaire au plan de la
Fig. 115. figure et projetté en A; et qu'il s'agit de trouver ce moment par rapport à une parallèle à cet axe projettée en C. Soient donc $AB = h$, $BC = l$; AX, AY les axes des x et y; et par conséquent, M étant la projection de la molécule m', $AP = x'$, $PM = y'$. La distance de cette molécule au nouvel axe est visiblement MC. Or on a

$$\overline{MC}^2 = \overline{CN}^2 + \overline{MN}^2 = (x' - h)^2 + (y' - l)^2.$$

Le produit de m' par $\overline{MC}^2$ sera donc, en développant,

$$m'(x'^2 + y'^2) + m'(h^2 + l^2) - 2m'x'h - 2m'y'l.$$

On aura le moment d'inertie de la molécule m'', en doublant les accens, et ainsi de suite. Faisons $m' + m'' + \text{etc.} = M$; additionnant ces résultats ou plutôt intégrant dans toute l'étendue du corps, nous aurons pour le moment d'inertie par rapport au nouvel axe,

$$S.m(x^2 + y^2) + (h^2 + l^2)M - 2hS(mx) - 2lS(my).$$

Cette valeur résout complettement le problême, puisque les deux premiers termes sont connus, et qu'il est très-facile d'évaluer les deux derniers, par des intégrations de la même nature que celles que nous avons déja effectuées pour les centres de gravité (55, 56).

Fig. 115. 241. Il pourroit arriver que le point A fût le centre de gravité du système, c'est-à-dire, que le moment d'inertie fût donné par rapport à un axe passant par ce centre, et qu'il fût question de déterminer ce moment par rapport à un autre axe parallèle passant en C : l'équation précédente

se simplifie beaucoup, car on a, par la propriété (55) du centre de gravité, $S(mx) = 0$, $S(my) = 0$; ou $m'x' + \text{etc.} = 0$, $m'y' + \text{etc.} = 0$; si on observe, en outre, qu'en faisant $AC = r$, on a $r^2 = h^2 + l^2$, il est facile de voir que l'expression (g'') devient

$$S.m(x^2 + y^2) + r^2M \ldots\ldots (h'').$$

Or dans cette formule, r^2M est le produit de la masse entière du corps par la distance du centre de gravité au nouvel axe; le premier terme est le moment d'inertie pris par rapport à l'axe passant par ce centre : donc, *pour avoir le moment d'inertie d'un corps par rapport à une droite, quand on connoît la valeur de ce moment par rapport à une autre droite parallèle passant par le centre de gravité, il faut à cette valeur ajouter le produit de la masse du corps par le quarré de la distance entre les deux axes.*

On observera que le moment d'inertie est essentiellement positif.

On écrit souvent la formule (h'') sous une autre forme plus commode. On suppose, ce qui est visiblement permis, que $Mk^2 = S.m(x^2 + y^2)$ ou

$$m'(x'^2 + y'^2) + m''(x''^2 + y''^2) + \text{etc.} = Mk^2;$$

de sorte que k^2 est le quotient du moment d'inertie du corps, par rapport à l'axe qui passe par le centre de gravité, divisé par la masse du corps. Alors le moment d'inertie est

$$M(r^2 + k^2) \ldots\ldots\ldots (i'').$$

242. Voici divers exemples de la recherche du moment d'inertie.

I. Trouver le moment d'inertie d'une droite $PM = a$, par rapport à un axe perpendiculaire en A au plan de la Fig. 116.

figure ; en supposant que la droite AP est perpendiculaire à PM.

Considérons une portion PB de la droite, si on fait $BP = x$, et $AP = b$, la molécule dx placée en B aura pour produit de son volume par le quarré de AB, $dx.(x^2 + b^2)$, dont l'intégrale est $\frac{1}{3}.x^3 + b^2x$. Or cette expression doit être prise depuis $x = 0$, jusqu'à $x = PM = a$: ainsi le moment d'inertie est $\frac{1}{3}.a^3 + ab^2$.

On pourroit opérer différemment en se servant de ce qu'on a vu ci-dessus. Soit I le centre de gravité, c'est-à-dire, le milieu de PM, on aura pour la distance d'une molécule quelconque B au point I, $BI = y$; $\int(y^2dy) = \frac{1}{3}y^3$ sera donc le moment d'inertie d'une portion de PM, pris par rapport à l'axe passant en I parallèlement au premier. Si on prend l'intégrale depuis $y = IP = -\frac{1}{2}a$ jusqu'à $y = MI = \frac{1}{2}a$, on aura $Mk^2 = \frac{1}{12}.a^3$ pour le moment d'inertie par rapport à l'axe qui passe en I. Mais pour avoir ce moment par rapport à l'axe qui passe en A, il faut (241) y ajouter $a \times AI^2$ ou $a[b^2 + (\frac{1}{2}a)^2]$; on aura enfin, en réduisant, $\frac{1}{3}.a^3 + ab^2$ pour le moment cherché.

II. Cherchons le moment d'inertie d'un parallélipipède rectangle dont les arêtes sont a, b et h, par rapport à l'axe des z passant par le centre de gravité, parallèle à l'arête a. Une molécule de ce corps a pour volume $dxdydz$; le quarré de sa distance à l'axe est $y^2 + x^2$. Il faut donc intégrer la quantité $dxdydz\ (y^2 + x^2)$ dans toute l'étendue du corps. Opérons d'abord par rapport à x dont les

limites sont $x = -\frac{1}{2}h$, et $x = \frac{1}{2}h$; nous aurons $h\left(y^2 + \frac{h^2}{3.4}\right)dxdy$: en intégrant de même de $y = -\frac{1}{2}b$, à $y = \frac{1}{2}b$, on obtient $hb\left(\frac{b^2+h^2}{3.4}\right)dx$. Enfin en intégrant par rapport à x, entre les limites $-\frac{1}{2}a$ et $+\frac{1}{2}a$, on a pour le moment d'inertie cherché . . . . . $Mk^2 = abh\left(\frac{b^2+h^2}{3.4}\right) = M\left(\frac{b^2+h^2}{3.4}\right)$, M désignant le volume du corps.

III. Cherchons le moment d'inertie d'un cercle, par rapport à un axe perpendiculaire au plan de la figure au centre C, ou en A. Faisons $CB = r$, $AC = q$. Par la nature du cercle, si $Cp = x$, on a $pm = y = \sqrt{(r^2 - x^2)}$. Concevons au point n de l'aire qui a x et $pn = z$ pour coordonnées, un élément rectangulaire $dxdz$; le produit de cet élément par le quarré de sa distance nC au centre C, sera $dxdz(z^2 + x^2)$; en intégrant par rapport à z seul, on a $\frac{1}{3}z^3dx + zx^2dx$ pour le moment d'inertie des élémens disposés le long de l'ordonnée pm; et on aura ce moment dans toute l'étendue de la double ordonnée mm', en prenant cette intégrale depuis $z = -y$, jusqu'à $z = y$: ce moment est Fig. 119.

$$2yx^2dx + \tfrac{2}{3}y^3dx = \tfrac{2}{3}\sqrt{(r^2 - x^2)}\,[r^2 + 2x^2]\,dx \ldots (1)$$

En intégrant cette expression depuis $x = -r$, jusqu'à $x = r$, on aura le moment d'inertie de l'aire entière du cercle par rapport au centre C. Pour exécuter cette intégration observons qu'en intégrant par parties on a

$$\int x.2x\sqrt{(r^2 - x^2)}.dx = -\frac{2x}{3}(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{2}{3}\int (r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx.$$

Or le dernier terme équivaut à $\frac{2}{3}\int (r^2 - x^2)\sqrt{(r^2 - x^2)}dx$,

ou $\frac{2}{3}r^2\int\sqrt{(r^2-x^2)}dx-\frac{2}{3}\int x^2\sqrt{(r^2-x^2)}dx$; substituant, transposant et réduisant on a

$$\int 2x^2\sqrt{(r^2-x^2)}dx=-\tfrac{1}{2}x(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}+\tfrac{1}{2}r^2\int dx\sqrt{(r^2-x^2)}.$$

Nous ne tiendrons pas compte ici du premier terme qui est zéro quand $x=-r$, et $x=r$; et qui par conséquent disparoît de l'intégrale complette : ainsi, en substituant dans la formule (1) ci-dessus, on trouve pour le moment d'inertie, par rapport à C, $\int r^2\sqrt{(r^2-x^2)}dx$: or $\int dx\sqrt{(r^2-x^2)}$ est une portion de demi-cercle dont x est l'abscisse; cette intégrale, prise entre les limites $x=-r$ et $x=r$, exprime donc le demi-cercle, c'est-à-dire, est $=\frac{1}{2}\pi r^2$; et le moment d'inertie cherché est $\frac{1}{2}\pi r^4=Mk^2$.

C'est ce qui est d'ailleurs facile à vérifier : car concevons dans notre cercle, une circonférence décrite d'un rayon $=Cn=z$; et une autre circonférence infiniment voisine; la première aura $2\pi z$ pour longueur, et elles formeront dans le cercle une couronne infiniment mince, dont l'épaisseur sera dz, et dont l'aire sera $2\pi z dz$; en multipliant par $\overline{Cn}^2=z^2$ on aura $2\pi z^3dz$ pour le moment d'inertie de cette couronne. En intégrant on a $\frac{1}{2}\pi z^4$ pour le moment d'inertie d'une couronne concentrique d'épaisseur finie, et en prenant l'intégrale depuis $z=0$ jusqu'à $z=r$, il vient $Mk^2=\frac{1}{2}\pi r^4$ pour le moment d'inertie de l'aire du cercle.

Soit donc r le rayon d'une poulie, h son épaisseur, $\frac{1}{2}\pi r^4h$ est son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation; il faut donc remplacer $S(\mu\rho^2)$ par cette valeur dans la formule du n°. 238; ou plutôt par $\frac{1}{2}\pi\delta r^4h$, δ étant la densité (51), parce que la poulie n'est pas homogène avec les cordons et les masses m et m'.

S'il falloit trouver le moment d'inertie par rapport à

l'axe passant en A, il ne faudroit qu'ajouter à $\frac{1}{2}\pi r^4$, le produit de l'aire πr^2 du cercle par AC^2, ce qui donneroit $\pi r^2(\frac{1}{2}r^2 + q^2)$.

IV. Trouver le moment d'inertie d'une sphère de rayon $OB = a$, par rapport à son diamètre AB. Soit $AP = x$, on aura $(RP)^2 = y^2 = 2ax - x^2$. Fig. 118.

En un point P du diamètre, si on conçoit un plan perpendiculaire, il coupera la sphère suivant un cercle, d'un rayon $PR = y$: ce que nous avons dit ci-dessus fait voir que le moment d'inertie de tous les élémens de ce cercle par rapport à son centre P est $\frac{1}{2}\pi y^4$: cette valeur multipliée par dx donne $\frac{1}{2}\pi y^4 dx = \frac{1}{2}\pi(2ax - x^2)^2 dx$ dont l'intégrale est $\pi x^3(\frac{2}{3}a^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{10}x^2) = Mk^2$. Elle désigne le moment d'inertie d'un segment sphérique. Cette intégrale, prise entre les limites $x = 0$, et $x = 2a$, donne $Mk^2 = \frac{8\pi a^5}{15}$ pour le moment d'inertie de la sphère entière par rapport à son diamètre.

V. Trouver le moment d'inertie de la sphère et d'un segment, par rapport à un axe parallèle au diamètre BA, et placé en CQ. Fig. 118.

D'après ce qu'on a vu (241), comme les valeurs trouvées précédemment sont celles du moment d'inertie pris par rapport à un axe passant par le centre de gravité, il ne faut que leur ajouter le produit de la masse entière du corps, par le quarré de la distance GO de ce centre à l'axe. Soit $GO = n$, on a

1°. Pour le cas du segment sphérique dont le volume est $= \pi x^2(a - \frac{1}{3}x)$, x désignant la flèche AP,

$$\pi x^2\left\{\frac{(2a^2 - n^2)x}{3} - \frac{ax^2}{2} + \frac{x^3}{10} + an^2\right\} \ldots (2).$$

2°. Pour la sphère dont le volume est exprimé par $\frac{4}{3}\pi a^3$,

$$\frac{4}{3}\pi a^3\left(n^2+\frac{2a^2}{5}\right)\ldots\ldots\ldots (3).$$

V. *Mouvement d'un corps choqué, retenu par un axe fixe.*

Fig. 120. 243. Concevons un corps dont la masse M et la forme soient connus, qui ait deux de ses points fixes, c'est-à-dire, qui soit retenu par un axe fixe perpendiculaire en A au plan de la figure : supposons que ce corps reçoit dans la direction BC une impulsion, ainsi que cela arrive lorsqu'un corps dont la masse est μ, vient le choquer avec la vîtesse u; cherchons les circonstances du mouvement de rotation qui s'établira. Si l'impulsion n'étoit pas dirigée dans un plan perpendiculaire à l'axe fixe, il faudroit la décomposer en deux autres, l'une qui rempliroit cette condition, et l'autre qui seroit parallèle à l'axe : celle-ci ne pouvant que faire glisser le corps dans le sens de l'axe, seroit détruite, puisqu'on suppose le corps retenu en deux de ses points. Quant à la première, cherchons l'effet qu'elle devra produire.

Si on connoissoit la vîtesse de rotation de l'un des points du corps, il seroit très-facile de déterminer celle des autres points; en effet, comme ils décrivent tous en même tems des circonférences qui ont pour rayons leurs distances respectives à l'axe, les vîtesses des diverses particules du corps sont entr'elles comme ces distances. La question est donc réduite à trouver la vîtesse de l'un des points du corps. Nous chercherons celle des points qui sont à l'unité de distance de l'axe fixe; désignons cette

quantité par u ; c'est ce qu'on appelle la *Vitesse angulaire* du corps (211).

Par l'effet de l'impulsion, la molécule m' décrira un cercle dont le rayon est $Am' = \varrho'$, et par conséquent, sa vîtesse sera $\varrho' u$; elle aura pour direction la droite $m'D$ perpendiculaire à Am' ; $\varrho'' u$ sera celle de m'' : et ainsi de suite. Le corps choquant μ, a sa vîtesse u dirigée suivant BC : supposons que ce corps est anéanti aussitôt après le choc ; et menons sur BC la perpendiculaire $AB = \iota$. Nous ferons ici usage du principe de d'Alembert, et nous aurons

masses.	v. imprim.	v. effectives.	dist. à l'axe.
μ	u	o	ι.
m'	o	$\varrho' u$	ϱ'.
m''	o	$\varrho'' u$	ϱ''.
etc.			

L'équilibre entre les forces imprimées, et celles qui ont lieu prises en sens opposé, devant avoir lieu autour de l'axe fixe, on sait (42) qu'il faut que la somme des momens, par rapport à cet axe, des quantités de mouvement, soit nulle. Ainsi on a

$$\mu u \iota - m' \varrho'^2 u - m'' \varrho''^2 u - \text{etc.} = 0.$$

Mais $m' \varrho'^2 + m'' \varrho''^2 + \text{etc.} = S(\varrho^2 m)$: donc

$$u = \frac{\mu u \iota}{S(\varrho^2 m)}.$$

Soit G le centre de gravité du corps, faisons $AG = a$, nous avons vu (241) qu'on avoit $S(\varrho^2 m) = M(a^2 + k^2)$, Mk^2 étant le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe qui passeroit par le centre de gravité parallèlement à l'axe fixe : donc on a

$$u = \frac{\mu u \iota}{M(a^2 + k^2)} \ldots\ldots (k'').$$

Expression qui équivaut à la précédente et qui résout le problême proposé.

Dans la formule (k'') la force impulsive est représentée par la quantité de mouvement μu ; on en tire

$$s = \frac{M}{\mu} \times \frac{u}{u} (a^2 + k^2).$$

Valeur qui donne la distance s de l'axe à la direction de cette force, pour qu'elle imprime au corps la vîtesse angulaire donnée u. Soit V la vîtesse connue que prendra alors le centre de gravité ; on aura $au = V$: et si on avoit les masses μ et M égales, ainsi que les vîtesses V et u, la valeur de s deviendroit

$$s = \frac{a^2 + k^2}{a} = a + \frac{k^2}{a} \ldots\ldots (l'').$$

Cette valeur exprime la distance de l'axe fixe à la direction de la force MV pour que le corps M, d'abord en repos, prenne par le choc un mouvement de rotation autour de l'axe, tel que son centre de gravité ait la vîtesse V. Le point du corps qui est à cette distance de l'axe, sur la perpendiculaire menée du centre de gravité à l'axe, est ce qu'on appelle le *Centre de percussion*. En supposant qu'un corps tourne autour d'un axe, *ce point est donc celui où il faut appliquer une quantité de mouvement égale et opposée à celle du centre de gravité du corps, pour arrêter tout-à-fait son mouvement.*

Lorsque le corps choqué M est libre, et animé de la vîtesse V, c'est au centre de gravité même qu'il faut appliquer, en sens opposé, la force MV pour le réduire au repos : mais quand le corps est fixé à un axe, on voit que c'est au centre de percussion qu'il faut appliquer cette force. Ainsi c'est par ce point que passe alors la résultante

des forces dont chaque particule du corps est animée. On peut donc, dans le cas actuel, concentrer, par la pensée, le corps au centre de percussion : et ce point remplacera le centre de gravité, puisqu'il offre la même propriété dont on a vu que celui-ci jouissoit dans la Statique.

244. La force μu agissoit précédemment sur le corps M supposé en repos ; généralisons notre théorie et supposons que ce corps est déja animé d'une vîtesse angulaire ω', dirigée dans le sens de la force μu, lorsque celle-ci vient à agir sur lui : laissons d'ailleurs les choses dans le même état qu'au n°. 243. Au moment du choc on peut regarder la masse M comme entraînée par celle μ qui la choque, et formant avec elle un seul et même corps : cela n'aura lieu, il est vrai, que pendant un instant, durant lequel le corps μ aura pour vîtesse absolue ω, qui est celle que prend le point B du corps choqué M. En raisonnant comme précédemment on voit qu'on a Fig. 120.

masses.	v. imprim.	v. effectives.	dist. à l'axe.
μ	u	ωs	s
m'	$\omega' \varrho'$	$\omega \varrho'$	ϱ'
m''	$\omega' \varrho''$	$\omega \varrho''$	ϱ''
etc.....			

et on trouve pour la vîtesse angulaire après le choc, à cause de $S(\varrho^2 m) = M(a^2 + k^2)$,

$$\omega = \frac{\mu u s + \omega' M(a^2 + k^2)}{\mu s^2 + M(a^2 + k^2)}.$$

Si on fait $\omega' = 0$, on a le cas où le corps M seroit en repos avant le choc. Celui où le corps μ se mouvroit en sens opposé de M s'obtient en rendant ω' négatif. Enfin si on fait $u = 0$ et ω' négatif, on a le cas où le corps M viendroit choquer la masse μ supposée en repos : alors,

en prenant les vîtesses positives dans le sens de s', et supposant qu'aussitôt après le choc un obstacle arrête subitement le corps choquant M, on a pour la vîtesse absolue v de μ,

$$v = \iota u = \frac{\iota u' M(a^2 + k^2)}{\mu\iota^2 + M(a^2 + k^2)}.$$

Cette expression devient nulle lorsque $\iota = 0$ et lorsque $\iota = \infty$: entre ces deux valeurs de ι, il y en a une pour laquelle la vîtesse v est un maximum; on l'obtient en faisant $\frac{dv}{d\iota} = 0$, ce qui donne

$$\iota = \sqrt{\left[\frac{M}{\mu}(a^2 + k^2)\right]}, \text{ et } u = \tfrac{1}{2}u'.$$

La vîtesse v du corps choqué est alors $v = \iota u = \frac{1}{2}\iota u'$. On voit par là que ce n'est que dans le cas particulier où $\frac{M}{\mu} = \frac{a^2 + k^2}{a^2}$ que le centre de percussion est le point qui jouit de la propriété de communiquer le maximum de vîtesse.

245. L'effort que supporte l'axe fixe est très-utile à déterminer : pour cela représentons par R une force appliquée à cet axe et capable de détruire cet effort, c'est-à-dire, propre à retenir le corps et à remplacer l'axe fixe (48, 136). On verra facilement que les quantités de mouvement imprimées sont μu, $u'\varrho'm'$, $u'\varrho''m''$, ... et $-R$; et que celles qui ont lieu sont $\iota u\mu$, $u\varrho'm'$, $u\varrho''m''$... On peut même supposer, sans altérer l'état du système, que toutes ces forces sont parallèles et à la même distance de l'axe. Comme ici l'équilibre n'existe plus à l'aide d'un axe fixe, nous devons recourir aux équations (S, 38) : la première nous sera seule nécessaire, parce que l'origine étant prise sur l'axe fixe, la force R ne seroit pas renfermée dans les autres. En observant que, par la propriété du centre de gravité (54), on a

$Ma = \rho' m' + \rho'' m'' + \text{etc.}$, on obtient donc

$$R = \mu(u - su) + Ma(u' - u)$$

valeur qui est visiblement égale à la somme des quantités de mouvement perdues, et qui devient, en éliminant u,

$$R = \frac{M\mu(u - u's)[a^2 + k^2 - as]}{\mu s^2 + M(a^2 + k^2)}.$$

Cette expression est nulle dans deux cas ; 1°. lorsque $u - u's = 0$: mais il est visible qu'alors il n'y a pas de choc ; 2°. lorsque $a^2 + k^2 - as = 0$, ce qui donne pour s la même valeur que la formule (k''). On conclut de là que *lorsque le choc s'opère par le centre de percussion*, (ou par tout autre point à égale distance de l'axe) *il n'y a aucun effort exercé sur l'axe de rotation.* Il est donc intéressant dans les machines, que les chocs puissent être exercés par ce point, afin d'éviter l'espèce de trépidation que ce choc produit, et qui tend à détruire promptement la machine. Nous retrouverons bientôt cette conséquence d'une autre manière (249, 1°. et 256).

VI. *Pendule composé.*

246. Jusqu'à présent le corps retenu par un axe fixe, n'étoit soumis qu'à l'action d'une ou plusieurs forces impulsives : voyons ce qui arriveroit, si chaque molécule de ce corps étoit sollicitée par une force accélératrice particulière. Considérons le corps M dont les molécules $m', m'', \ldots$ sont sollicitées par les forces $\varphi', \varphi'', \ldots$ connues en grandeur et en directions : soient $\rho', \rho'', \ldots$ les distances de ces molécules à l'axe ; et $p', p'', \ldots$ les perpendiculaires abaissées de cet axe sur les directions respectives des forces. Soit enfin ω la vîtesse angulaire du corps au bout du tems t, Fig. 120 bis.

vîtesse qui devra s'accroître de ds dans l'instant dt suivant.

Cela posé, on voit que pour la molécule m', par exemple, dans les directions $m'D$ et $m'H$, deux impulsions $\varpi\varrho'$ et $\varphi' dt$ agissent, mais que par la liaison du système ces impulsions ne produiront pas tout leur effet, et que la vîtesse que la molécule m' prendra réellement suivant $m'D$ sera $\varrho'(\varpi + d\varpi)$: on aura d'ailleurs $Am' = \varrho'$, et $AH = p'$. On en dira autant des autres molécules ; et on aura

masses.	v. impr.	dist. à l'axe.	v. effect.	dist. à l'axe.
m' ...	$\left\{\begin{matrix}\varrho'\varpi \\ \varphi' dt\end{matrix}\right.$	$\left.\begin{matrix}\cdots\varrho' \\ \cdots p'\end{matrix}\right\}$	$\cdots\varrho'(\varpi+d\varpi)$	$\cdots\varrho'$
m'' ...	$\left\{\begin{matrix}\varrho''\varpi \\ \varphi'' dt\end{matrix}\right.$	$\left.\begin{matrix}\cdots\varrho'' \\ \cdots p''\end{matrix}\right\}$	$\cdots\varrho''(\varpi+d\varpi)$	$\cdots\varrho''$
etc.				

L'équilibre entre les forces qui ont lieu prises en sens contraire et les forces imprimées devant être établi à l'aide de l'axe fixe, on doit exprimer (42) que la somme des momens de toutes ces forces, par rapport à cet axe, est nulle, ce qui donne

$$(m'\varphi'p' + m''\varphi''p'' + \text{etc.})\,dt = (m'\varrho'^2 + m''\varrho''^2 + \text{etc.})\,d\varpi.$$

On en tire

$$\frac{d\varpi}{dt} = \frac{S(\varphi pm)}{S(\varrho^2 m)} \cdots\cdots (m'').$$

Il résulte de là que *la force accélératrice angulaire, est le quotient de la somme des momens des forces motrices divisée par le moment d'inertie.* Voici l'usage de cette équation. Après avoir trouvé les valeurs de $S(\varrho^2 m) = M(a^2 + k^2)$ et de $S(\varphi pm)$, ce qui exige deux intégrations prises dans toute l'étendue du corps, et indépendantes du tems et de toute notion de mouvement, on intégrera la formule précédente par rapport aux variables

t et u ; on obtiendra ainsi la vitesse absolue u d'un point situé à la distance r de l'axe fixe, et par conséquent celle de tous les autres points du corps. Ce premier point décrit un arc que nous désignerons par s, à partir d'un instant déterminé, (par exemple depuis le moment où on avoit $t = 0$) on a $u = \frac{ds}{dt}$. En intégrant de nouveau on obtiendra s en fonction de t, et par conséquent on aura tout ce qui peut intéresser dans le mouvement gyratoire du corps. Les constantes introduites dans ces intégrations dépendent des valeurs initiales de la vitesse u et de l'arc s; elles se détermineront comme précédemment (153, 167).

247. Appliquons ces principes au *Pendule composé* : concevons un corps M, de figure déterminée, retenu par un axe fixe A, et dont toutes les molécules soient sollicitées par la gravité; soit Mq la coupe de ce corps par un plan vertical passant par le centre de gravité I, et perpendiculaire à l'axe de rotation projetté en A : le corps est retenu à cet axe par une verge inflexible IA, dénuée d'inertie, et dirigée au centre de gravité; An est la position initiale de cette verge, qui est supposée parvenue en AM au bout du tems t. Menons la verticale AB et faisons $MAB = \theta$, $mAB = f$, $mAM = \alpha$, et $AI = r$. Comme la gravité g est la force accélératrice qui sollicite toutes les molécules, on peut sortir g du signe S, et la formule (m'') devient $\frac{du}{dt} = \frac{gS(mp)}{S(g^2m)}$. Or on peut (h'') remplacer le moment d'inertie $S(g^2m)$ par $M(r^2 + k^2)$, M étant la masse du corps oscillant. D'ailleurs par la théorie des centres de gravité (54), en supposant le corps entier réuni en son centre de gravité I, le moment est égal à la somme des moments des molécules m', m'', ... par rapport à un plan perpendiculaire à la figure et passant en AB; ainsi

Fig. 119.

$M \times IP = m'p' + m''p'' + \text{etc.} = S(mp)$; d'ailleurs $IP = r \sin \theta$; donc on a $S(mp) = rM \sin \theta$, et la formule (m'') devient enfin $\frac{dv}{dt} = \frac{rg \sin \theta}{r^2 + k^2}$.

Pour intégrer cette équation, observons que $v\,dt = ds$, mais $\alpha = f - \theta$; donc $v\,dt = -d\theta$; multipliant cette équation par la première, on a $v\,dv = -\frac{rg}{r^2+k^2} \times \sin \theta\, d\theta$, dont l'intégrale est $v^2 = \frac{2rg}{r^2+k^2}(\cos\theta + C)$; et comme $\theta = f$ doit donner $v = 0$, on a $C = -\cos f$; donc enfin

$$v = \sqrt{\left\{\frac{2gr}{r^2+k^2}(\cos\theta - \cos f)\right\}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (n'').$$

248. Les divers points matériels qui composent le pendule ont des vîtesses différentes de celles qu'ils auroient s'ils étoient libres, ainsi qu'on peut s'en convaincre en comparant la vîtesse de l'un d'eux à celle qu'il auroit s'il étoit libre, à l'aide de la formule précédente et de celle (t', 197) qu'on déduit aussi de (n'') en y faisant $k = 0$. Ainsi la liaison de ces points entr'eux les force d'exercer une action mutuelle qui altère leurs vîtesses propres : celle des uns est plus grande, celle des autres est moindre que s'ils étoient seuls. Il est donc aisé de prévoir qu'il y a quelque part sur la ligne AI un point q dont la vîtesse n'est point altérée, et qui se meut comme s'il étoit seul. On a donné à ce point le nom de *Centre d'Oscillation*. Voici comment on peut se convaincre de l'existence de ce point. Soit $Aq = \iota$; au bout du tems t, la formule (t' ou n'') fait voir que si ce point étoit seul, il auroit pour vîtesse absolue

$$\iota v = \sqrt{[2g\iota(\cos\theta - \cos f)]}.$$

Mais comme ce point fait d'ailleurs partie du corps, on

peut aisément trouver sa vîtesse u à l'aide de l'équation (n'') : en égalant ces deux valeurs, on trouve

$$t = \frac{r^2 + k^2}{r} = r + \frac{k^2}{r} \ldots\ldots (o'').$$

249. Ce résultat nous fournit quelques conséquences importantes :

1°. Le centre d'oscillation est le même que le centre de percussion ; c'est celui où on peut réunir toute la masse du corps en mouvement autour de l'axe (243) : ce point est sur la ligne qui joint l'axe au centre de gravité, et il est plus éloigné de l'axe que celui-ci de la quantité $qI = \frac{k^2}{r}$. Cette valeur devient infinie lorsque l'axe de rotation passe par le centre de gravité : ce qui signifie, que le tems d'une oscillation est infini dans ce cas.

2°. *Le centre d'oscillation et le point de suspension sont réciproques l'un de l'autre ;* c'est-à-dire, que si l'axe de rotation étoit en q, le point A seroit le centre d'oscillation. En effet, la distance du centre de gravité au centre d'oscillation est aussi donnée dans ce cas par la formule (o'') qui devient $= \frac{k^2}{r'}$, r' étant la distance qI du point de suspension q au centre de gravité I, et Mk^2 désignant toujours le moment d'inertie du corps par rapport à un axe qui passeroit par ce dernier centre, et qui seroit parallèle à l'axe de rotation. Or si on observe que $r' = \frac{k^2}{r}$, on trouve que $\frac{k^2}{r'} = r$; ce qui démontre le théorême ci-dessus.

3°. Pour un corps de figure connue, les tems des oscillations sont les mêmes que ceux d'un pendule simple dont la longueur est t : mais la formule (o'') démontre que ces tems sont les mêmes pour des valeurs de r égales :

ainsi *les tems des oscillations d'un corps déterminé, sont les mêmes pour des centres de suspension, pris à égale distance du centre de gravité.* Il est aisé de conclure de là que si dans le plan mené par le centre de gravité perpendiculairement à l'axe de rotation, on marque un point de suspension et le centre d'oscillation, tous les points placés dans le même plan et à la même distance du centre de gravité donneront des oscillations d'égale durée; et en ayant égard à la réciprocité des centres de gravité et d'oscillation, on voit qu'on aura deux circonférences concentriques dont chaque point pourra servir d'axe de suspension, la durée des oscillations restant toujours la même.

Si maintenant on changeoit la direction de l'axe de rotation, on trouveroit un autre système d'axes qui jouiroient de la même propriété : de sorte que ces différens systèmes sont tangens à deux sphères concentriques autour du centre de gravité. On conclut de là qu'*il existe dans tout corps solide une infinité d'axes autour desquels les oscillations sont synchrones*, c'est-à-dire, d'égale durée. Nous n'ajouterons rien de plus sur cette matière, quoiqu'elle soit susceptible d'un plus grand développement, ainsi que *Biot* l'a fait voir dans ses intéressantes leçons au Collége de France; mais nous nous éloignerions trop de notre sujet.

250. Il est inutile d'insister sur l'importance de la recherche des centres d'oscillation des corps; car puisque les circonstances du mouvement du pendule composé sont les mêmes que pour un pendule simple dont la longueur est s, si on conçoit toute la masse du corps oscillant réunie au centre d'oscillation, on n'aura plus à considérer qu'un pendule simple, dont les oscillations seront synchrones avec celles du corps : de sorte que tout ce qu'on a dit chapitre II, article V, doit avoir lieu ici.

251. Appliquons maintenant la formule (o^{n}) à la re-

cherche de la position du centre d'oscillation ou de percussion d'un corps de figure connue.

1°. Commençons par la sphère ANB que nous supposerons osciller autour de l'axe GQ ; on sait (242, IV) que son moment d'inertie par rapport au diamètre AB est $Mk^2 = \frac{8\pi a^5}{15}$, le rayon étant a; et comme son volume est $M = \frac{4}{3}\pi a^3$, on a $k^2 = \frac{2}{5}a^2$. Soit X le centre d'oscillation cherché, la formule (o'') devient donc $s = GX = r + \frac{2}{5}\cdot\frac{a^2}{r}$, d'où $OX = \frac{2}{5}\cdot\frac{a^2}{r}$: c'est-à-dire, que OX est les deux cinquièmes de la troisième proportionnelle à OG et au rayon. Si l'axe de suspension étoit en N, comme r seroit $= a$, on auroit $OX = \frac{2}{5}a$. Et si on avoit le diamètre AB pour cet axe; s seroit ∞, ce qui est d'ailleurs évident (249, 1°.). Fig. 118.

2°. S'il s'agit d'un segment de sphère, tel que ARH, en faisant $AP = x$, on sait qu'on a $M = \pi(a - \frac{1}{3}x)x^2$: d'ailleurs on a (242, IV) pour le moment d'inertie $Mk^2 = \pi x^3(\frac{1}{3}a^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{10}x^2)$; donc on a pour la distance du centre d'oscillation au centre de gravité du segment Fig. 118

$$\frac{k^2}{r} = \frac{(\frac{1}{3}a^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{10}x^2)x}{r(a - \frac{1}{3}x)}.$$

Les pendules de nos horloges sont ordinairement composés de deux segmens accolés par les cercles de leurs bases : la formule précédente est visiblement la même pour un segment que pour deux; mais l'emploi en seroit plus commode, si au lieu d'être en fonction du rayon a de la sphère, elle renfermoit le rayon $PR = b$ du cercle de la base. On a dans le triangle PRO, $a^2 = b^2 + (a-x)^2$,

d'où $a = \frac{x^2 + b^2}{2x}$, en substituant on trouve, toutes réductions faites,

$$\frac{k^2}{r} = \frac{b^4 + \frac{1}{3} b^2 x^2 + \frac{1}{10} x^4}{r(3b^2 + x^2)}.$$

En ajoutant r à cette valeur, on auroit la distance s de l'axe de suspension au centre d'oscillation.

3°. De même pour un parallélipipède rectangle dont les côtés sont b, b' et h, qui oscille autour d'une ligne parallèle à l'arête b', menée par le point de son axe qui est distant de r de son centre de gravité, on a (242, II) $k^2 = \frac{b^2 + h^2}{3.4}$; d'où on tire pour la distance de ce centre au centre d'oscillation $\frac{k^2}{r} = \frac{b^2 + h^2}{3.4r}$. Si l'axe de rotation étoit placé à la base supérieure du parallélipipède, on auroit $r = \frac{1}{2} h$, d'où $s = \frac{4h^2 + b^2}{6h}$.

252. Quelquefois plusieurs corps liés ensemble oscillent autour d'un même axe; voyons comment on peut déterminer la position du centre d'oscillation de leur système. Soient r', r'', ... s', s'', ... les distances de l'axe de rotation aux centres de gravité et d'oscillation de ces corps; M', M'', ... leurs masses. Il est visible que la formule (o'') indique que la distance s de l'axe de rotation au centre d'oscillation cherché est le quotient du moment d'inertie du système divisé par le produit de sa masse $M' + M'' +$ etc. par la distance r du centre de gravité du système à ce même axe. Or cette même formule donne $s' = \frac{r'^2 + k'^2}{r'}$; donc le moment d'inertie de M' est

$M'r'\varepsilon'$; le moment d'inertie du système, ou la somme des momens d'inertie de tous les corps qui le composent, est $M'r'\varepsilon' + M''r''\varepsilon'' +$ etc. De plus, par la nature du centre de gravité, on a (54)

$$(M' + M'' + \text{etc.})\,r = M'r' + M''r'' + \text{etc.},$$

en supposant que tous ces corps ont leurs centres de gravité dans la même droite menée à l'axe : donc enfin on a

$$s = \frac{M'r'\varepsilon' + M''r''\varepsilon'' + \text{etc.}}{M'r' + M''r'' + \text{etc.}} \ldots\ldots (p''),$$

formule qui résout le problème proposé.

VII. *Théorie physique de la Percussion.*

253. Dans l'article I, nous n'avons examiné les phénomènes de la percussion qu'en supposant l'un des corps retenu par un axe fixe; il convient de généraliser notre théorie : nous allons donc supposer ici les corps parfaitement libres.

Soit d'abord un système de points matériels $m', m'' \ldots$ libres, et point liés entr'eux, animés de vîtesses parallèles V', V'', ...; cherchons quel sera le mouvement du centre de gravité de ce système.

Faisons passer par ce centre un plan parallèle aux directions des impulsions; comme dans l'origine du mouvement, la somme des momens de m', m'', ... par rapport à ce plan (55) est nulle; il est clair qu'elle sera encore nulle dans la suite, puisque ces corps conservent leurs distances respectives à ce plan; ainsi le centre de gravité est constamment dans ce plan : et comme on peut en dire autant de tout autre plan parallèle aux impulsions et par-

sant par ce centre, il s'ensuit que le *centre de gravité décrit une droite parallèle aux vîtesses imprimées.*

De plus *son mouvement est uniforme;* car concevons un plan perpendiculaire aux directions des vîtesses, et désignons par E', E'',... les distances de m', m'',.... à ce plan au commencement du mouvement; au bout du tems t leurs distances seront $E' + V't$, $E'' + V''t$,..., (*a*, 144); prenons les momens par rapport à ce plan; X, X' étant les distances du centre de gravité à ce plan, à l'origine du mouvement et au bout du tems t, on aura (54) les équations

$$(m' + m'' + \text{etc.})\, X = m'E' + m''E'' + \text{etc.}$$
$$(m' + m'' + \text{etc.})\, X' = m'(E' + V't) + m''(E'' + V''t) + \text{etc.}$$

On obtient, en soustrayant la première de la seconde,

$$(m' + m'' + \text{etc.})\,(X' - X) = (m'V' + m''V'' + \text{etc.})\, t;$$

ce qui fait voir que l'espace $X' - X$ parcouru par le centre de gravité est proportionnel au tems.

Enfin *la quantité de mouvement qu'auroit le centre de gravité, si on concevoit toutes les masses concentrées en ce point, seroit égale à la somme de celles des corps;* car l'équation précédente donne $m'V' + m''V'' + \text{etc.}$ pour cette quantité de mouvement, puisque $m' + m'' + \text{etc.}$ est la masse qu'on attribue au centre de gravité, et que ce point est animé de la vîtesse $\dfrac{m'V' + m''V'' + \text{etc.}}{m' + m'' + \text{etc.}}$.

On ne doit pas oublier de prendre négativement les vîtesses qui sont dirigées en sens contraire des autres.

Ainsi *le centre de gravité se meut avec la même vîtesse que si toutes les impulsions lui eussent été immédiatement imprimées*, ou, si on veut, *le centre de gravité se meut comme si toutes les masses du système y étoient*

concentrées, et que toutes les forces lui fussent appliquées, en les transportant parallèlement à leurs directions.

Si ces vîtesses imprimées avoient des directions quelconques, je dis que la même chose auroit encore lieu. Car décomposons chacune d'elles en trois autres parallèles à trois axes rectangulaires : en vertu de chacun de ces groupes, le centre de gravité sera mu parallèlement à chaque axe, comme si ces forces lui étoient immédiatement appliquées; car on peut faire pour chacun d'eux le raisonnement précédent; et à cause de l'indépendance des effets des forces de directions rectangulaires (146, 4°.), l'action simultanée de ces trois groupes de forces n'altérera en rien ce mouvement dans le sens de chacun des axes.

254. Faisons voir maintenant que lorsque les corps sont liés entr'eux d'une manière quelconque, la proposition ci-dessus est également vraie. Pour cela, soient P', P'',... les forces qui agissent sur ces corps : décomposons chacune d'elles en deux autres; l'une qui ait lieu, et l'autre qui soit détruite : de sorte que F', F''... soient les forces qui doivent produire tout leur effet, d'après la nature du système; et que f', f'',... soient celles qui se trouvent détruites par l'action mutuelle de ses parties : F' et f' sont d'ailleurs les composantes de P', et ainsi des autres. En vertu des forces F', F'',... le corps devra se mouvoir sans qu'il y ait de force perdue; c'est-à-dire, que si on ne supposoit que ces puissances agissantes sur le système, il seroit indifférent d'en regarder les parties comme liées entr'elles, ou comme parfaitement libres.

Il résulte de là, et de ce qu'on a vu ci-dessus, que le centre de gravité du système devra se mouvoir comme si les forces F', F'',... lui étoient immédiatement appli-

quées, en les transportant parallèlement à leurs directions. Quant aux forces f', f''.... elles se détruisent mutuellement lorsqu'elles agissent sur les parties du système, et satisfont par conséquent aux six équations (T et U, 39 et 40); donc, à plus forte raison, elles doivent se détruire en les transportant au centre de gravité, puisque les équations (U ou J) ont lieu. Ce centre est donc sollicité à la fois par les forces F', F'',... et f' f'',... ou, ce qui revient au même, par les puissances P', P'',... ce qui démontre le théorème ci-dessus.

255. Lorsqu'on donne à un corps une impulsion P qui ne passe pas par le centre de gravité G, ce centre prend donc le même mouvement de translation que si la force agissoit immédiatement sur lui. Mais ce mouvement n'est pas le seul que le corps doive prendre. Pour nous en assurer, mettons en évidence la partie de la force P qui agit sur le centre de gravité. Le plan de la figure 121 est supposé passer par ce centre et par la direction de la force P; AG est perpendiculaire sur AP, $AG = GB$. Concevons que le point B est sollicité par deux forces opposées R et S, telles que $R = S = \frac{1}{2}P$: l'état du corps ne sera point changé. Mais en composant la puissance S et la moitié de la force P, on voit que le centre de gravité est sollicité par une force $T = P$; de sorte que si on introduit une nouvelle force Q égale et opposée agissant en G, il ne restera plus que les forces R et $\frac{1}{2}P$: comme elles sont égales et opposées, elles ne donneront aucun mouvement (254) au centre de gravité, qui par conséquent restera en repos comme s'il étoit fixe ; il est donc visible qu'elles feront tourner le corps autour de ce centre fixe, comme le feroit la force P elle-même (106). Ainsi l'effet de la force Q est uniquement d'arrêter le mouvement de translation du centre de gravité.

Fig. 121.

Il suit de là que *lorsqu'un corps est mu par des forces dont la résultante ne passe pas par le centre de gravité, ce corps a un double mouvement,* 1°. *il tourne autour de ce centre comme s'il étoit absolument fixe;* 2°. *ce centre se meut comme si les forces lui étoient immédiatement appliquées.*

256. Rien ne sera donc plus facile que de trouver le mouvement d'un corps mu par une impulsion quelconque; car le mouvement de translation du centre de gravité rentrera dans la théorie connue, puisqu'il ne s'agira que du mouvement d'un point; et celui de rotation étant le même que s'il y avoit un axe fixe, on n'aura plus qu'à appliquer ce qui a été dit à ce sujet (243). Soit P la quantité de mouvement imprimée, s sa distance OG au centre de gravité du corps M; on aura (255) pour la vîtesse de translation du centre de gravité $v = \frac{P}{M}$. La vîtesse angulaire sera donnée par la formule (k''); mais comme l'axe fixe passe ici par le centre de gravité du corps, le moment d'inertie se réduit à Mk^2, et on a Fig. 122.

$$u = \frac{Ps}{Mk^2} = \frac{vs}{k^2} \ldots\ldots (q'').$$

La vîtesse absolue de chaque point du corps se compose d'ailleurs de ces deux vîtesses; si la force P sollicite le corps M, dans la direction PS, le point O, où la perpendiculaire abaissée du centre de gravité G sur cette direction la rencontre, prend deux vîtesses; l'une représentée par Oi est celle que devra prendre le centre de gravité G, et l'autre est ih qui est due à la rotation. Tout autre point de $OG = s$ offre la même circonstance s de sorte qu'en prenant celui qui est distant du point G de la quantité b, il a pour vîtesse absolue $v \pm bu$; le signe $+$ a lieu pour Fig. 122.

tous les points situés de G vers O, le signe — a lieu pour tous ceux qui sont placés de G vers C.

Concevons l'effet de ce double mouvement pendant un instant; la ligne Oih pourra être considérée comme droite et décrite par le point O, dans le tems où le centre de gravité G passe en g: la droite OG prendra la position hgC, de sorte que le point C n'aura pas changé de place; en effet, il auroit dû passer de C en C' en vertu de la translation, et revenir de C' en C par l'effet de la rotation. Ce point C a été nommé *Centre spontané de rotation*. Il est facile d'en connoître la position; car il est déterminé par la condition que sa vîtesse absolue $v - bs$ est nulle, ce qui donne $b = \frac{v}{s}$, ou plutôt $b = \frac{k^2}{i}$, à cause de la formule (q''). Or $OC = OG + GC = i + b$; donc on a $OC = i + \frac{k^2}{i}$. Cette expression, comparée à $(o''$ et $l'')$, fait voir que le *centre spontané de rotation est le même que le centre de percussion et d'oscillation, en supposant que le corps tourne autour d'un axe passant en* O. Ce point est d'ailleurs indépendant des forces, puisque la valeur OC ne renferme ni M ni P; de plus, il suit de l'exposé ci-dessus que si on place en C un axe de rotation, il n'éprouvera aucune secousse, ce qui est d'accord avec ce qu'on a déja vu (245).

257. Pour expliquer le double mouvement de rotation et de translation des planètes, il suffit de supposer que chacune a reçu primitivement une impulsion, dont la direction ne passe pas par son centre de gravité. La terre fait chaque jour un tour sur son axe, et la vîtesse de rotation d'un des points de l'équateur est $V = 401^m,699$; indépendamment de son mouvement de translation qui lui fait parcourir son orbite dans une année avec la vîtesse

$v = 25590^m,9$; l'unité de tems étant le cent millième du jour. Soit r le rayon de la terre, on a (242, IV.) $k^2 = \frac{2}{5} r^2$; et $V = r_{\prime\prime}$, (211) : cette planète auroit donc reçu une impulsion dont la direction auroit passé à la distance (q'') de son centre $\varepsilon = \frac{k^2 u}{v} = \frac{2}{5} \cdot \frac{rV}{v}$, en la supposant homogène. Le calcul donne à-peu-près $\varepsilon = \frac{r}{160}$.

258. Lorsque nous avons traité du choc des corps durs, article I, nous les avons réduits par la pensée à n'être que simples points matériels : nous allons maintenant analyser la même théorie en conservant aux corps leurs formes particulières.

Soient M' et M'' les masses de deux corps durs ; suppo- Fig. 122.
sons que le dernier est en repos, et choqué par le premier, animé de la vîtesse V', dans la direction LR normale à la surface choquée, et qui ne passe pas par le centre de gravité G. Menons GN perpendiculaire sur LR, et faisons $GN = a$.

Désignons par v' et v'' les vîtesses des centres de gravité des masses M', M'' après le choc ; on aura $V' - v'$ pour la vîtesse perdue par celui de M' dans le choc, de sorte que $M' (V' - v')$ sera la quantité de mouvement employée à mouvoir M'', valeur égale par conséquent à $M'' v''$, (218) : la vîtesse de M'' après le choc sera donc $v'' = \frac{M'}{M''} (V' - v')$.

La formule (q'') devient ici $u = \frac{a v''}{k^2}$.

Quoique ces deux équations soient les seules que donne le double mouvement du corps M'', elles ne suffisent pas pour résoudre le problême, et il faut s'en procurer une troisième, puisqu'elles comprennent trois inconnues. Il est même visible que la nature du système la comporte et

qu'elle nous offre une condition dont nous n'avons point fait encore usage. En effet le corps M'' n'a acquis toute la vîtesse que le choc doit lui imprimer que lorsqu'il n'est plus pressé par le corps choquant (217), ce qui arrive lorsque les points L de contact de ces corps ont la même vîtesse dans le sens de LN. Il suit de là que cette vîtesse du point L, considéré comme faisant partie des deux corps, doit être la même et $= v'$. En tant qu'il appartient à M'', il aura pour vîtesse (211), $u.LG$; soit pris sur la droite Lm, perpendiculaire à LG, une partie Ln pour représenter cette vîtesse, on aura $u.LG = Ln$. Or on pourra concevoir cette vîtesse décomposée en deux autres dirigées, l'une suivant LN, et l'autre suivant la tangente TS. La première sera $Ln.\cos NLn$, ou $Ln.\sin NLG = \frac{GN.Ln}{GL} = u \times GN = \frac{a^2 v''}{k^2}$; or puisque la vîtesse de translation est v'', en réunissant ces deux quantités, on aura $v' = v'' + \frac{a^2 v''}{k^2}$.

Ces trois équations serviront à déterminer v', v'' et u en éliminant : elles résolvent donc le problême proposé.

Si la vîtesse du corps M' avant le choc étoit oblique à la tangente TS, on la décomposeroit en deux autres, l'une V' perpendiculaire à cette tangente, l'autre V'' dans le sens de cette droite. La première est celle que nous venons de considérer ci-dessus; la deuxième a son effet entier, puisqu'elle est à angle droit avec l'autre : on devra donc la composer avec la vîtesse v' qui restera de la vîtesse V' après le choc. La vîtesse que le corps choquant M' aura après le choc sera donc $= \sqrt{(v'^2 + V''^2)}$ et sa direction fera avec la touchante TS un angle qui a pour tangente $\frac{v'}{V''}$.

VIII. *Mouvement d'un corps solide, dont toutes les molécules sont sollicitées par des forces accélératrices quelconques.*

259. Examinons les circonstances du mouvement d'un corps solide soumis à l'action de forces accélératrices quelconques qui agissent sur toutes ses molécules $m', m'', \ldots$ Réduisons pour chaque molécule les forces qui la sollicitent à trois parallèles à trois axes immobiles ; savoir X', Y', Z' pour m' ; X'', Y'', Z'' pour m'' ; et ainsi des autres. Soient x, y et z les coordonnées variables du centre de gravité de ce corps par rapport à ces trois axes. Concevons de plus qu'on a fait passer par ce centre trois autres axes parallèles aux premiers, et tels que lorsque le corps est en mouvement il les emporte avec lui, sans qu'ils cessent d'être parallèles aux premiers, ni de passer par le centre de gravité : bien entendu que leurs points de rencontre avec le corps seront variables. Nommons x', y' et z' les coordonnées de la molécule m' rapportée à ces trois axes ; de même x'', y'' et z'' pour m'' ; ... les variables x, y et z détermineront la position du centre de gravité du corps au bout du tems t ; et x', y', z ; x'', y'', z'' ; ... donneront les positions respectives des molécules dans leur mouvement particulier : c'est ce qui deviendra bientôt parfaitement clair. Les coordonnées de m' par rapport aux trois premiers axes immobiles sont $x + x', y + y', z + z'$: de même $x + x'', y + y'', z + z''$ pour m'' ; et ainsi des autres.

Nous ne ferons ici nos raisonnemens que dans le sens de l'un des axes, parce que les deux autres offrent les mêmes

considérations. La vîtesse de la molécule m' dans le sens des x est $\frac{d(x+x')}{dt}$, ou $\frac{dx+dx'}{dt}$, vîtesse qui doit s'accroître durant l'instant dt suivant de $d\left(\frac{dx+dx'}{dt}\right)$ par l'effet des puissances et d'après la liaison mutuelle des parties du système. La vîtesse imprimée à m' suivant les x pendant l'instant dt est $X'dt$. Dans le tableau suivant nous n'avons eu égard qu'aux accroissemens de vîtesse puisqu'on voit que les vîtesses mêmes disparoissent du calcul. Ainsi on a

masses.	v. impr.	v. effectives.	dist. à l'axe des z.
m'	$X'dt$	$d\left(\frac{dx+dx'}{dt}\right)$	$y+y'$
m''	$X''dt$	$d\left(\frac{dx+dx''}{dt}\right)$	$y+y''$
etc.			

Dans le sens des y on auroit de même

masses.	v. impr.	v. effectives.	dist. à l'axe des z.
m'	$Y'dt$	$d\left(\frac{dy+dy'}{dt}\right)$	$x+x'$
m''	$Y''dt$	$d\left(\frac{dy+dy''}{dt}\right)$	$x+x''$
etc.			

Il en seroit de même dans le sens des z. Il s'agit maintenant d'exprimer qu'il y a équilibre entre les forces imprimées, et celles qui ont lieu prises en sens opposé : ce qui nécessite l'usage des six équations (T) et (U) démontrées n°s. 39 et 40, et on aura les six équations du mouvement.

1°. Les trois équations (U) indiquent que la somme des

composantes dans le sens de chaque axe est nulle ; cette somme est dans le sens des x, en prenant dt constant,

$$0 = (X'm' + X''m'' + \ldots)\,dt^2 - d^2x\,(m' + m'' + \ldots) - (m'.d^2x' + m''.d^2x'' + \ldots).$$

Supposons $m' + m'' + \text{etc.} = M =$ la masse entière du corps ; de plus, en employant la notation du n°. 54, on aura $X'm' + X''m'' + \text{etc.} = S.X'm'$, le signe S désignant une intégrale prise dans toute l'étendue de la masse du corps. Enfin par la propriété du centre de gravité (C',55), on a

$$x'm' + x''m'' + \text{etc.} = 0,\ m'y' + m''y'' + \text{etc.} = 0 \ldots (1).$$

En différentiant par rapport à x et y, on a donc

$$m'd^2x' + m''d^2x'' + \text{etc.} = 0,\ m'd^2y' + m''d^2y'' + \text{etc.} = 0.(2).$$

L'expression précédente équivaut donc à

$$M.\frac{d^2x}{dt^2} - S.X'm' = 0.$$

En faisant les mêmes raisonnemens, par rapport aux axes des y et des z, on trouve donc pour les trois premières équations de mouvement

$$\left.\begin{aligned} M.\frac{d^2x}{dt^2} &= S.X'm' \\ M.\frac{d^2y}{dt^2} &= S.Y'm' \\ M.\frac{d^2z}{dt^2} &= S.Z'm' \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (r'').$$

Nous nous servons ici de deux signes dont il est important de bien distinguer le sens. La caractéristique d est employée à désigner les variations successives des coordonnées lorsque le corps change de position : le signe S est destiné à représenter des sommes de termes de même forme

et dont les accens sont seuls différens : lorsque le nombre de ces termes est infini, S désigne une véritable intégrale, prise dans toute l'étendue du corps, mais qui est indépendante de ses changemens de position. L'intégrale relative à cette dernière circonstance sera désignée par la lettre $\int$.

2°. Il faut exprimer que les momens des composantes satisfont aux équations (T), n°. 39. Prenons donc la différence des momens par rapport à l'axe des z, des composantes respectivement parallèles aux x et aux y, et égalons cette différence à zéro. Or, observons que, pour le point m', ces composantes seront distantes de l'axe des z, savoir la première de $y+y'$, et la seconde de $x+x'$; on aura donc, pour la différence des momens,

$$\left(X'm' - \frac{d^2x}{dt^2}m' - \frac{d^2x'}{dt^2}m'\right)(y+y')$$
$$-\left(Y'm' - \frac{d^2y}{dt^2}m' - \frac{d^2y'}{dt^2}m'\right)(x+x').$$

En exécutant les multiplications et observant que comme chaque molécule doit donner une expression semblable, toutes les lettres marquées d'un trait doivent se reproduire dans des termes semblables avec 2, 3, ... accens : de plus en représentant la somme des termes de même forme par le signe S, et ayant égard aux équations (1) et (2) données par la propriété du centre de gravité, on obtient

$$\left.\begin{aligned} &yS.m'X' - My.\frac{d^2x}{dt^2} + S.y'X'm' - S.m'y'\frac{d^2x'}{dt^2} \\ &-xS.m'Y' + Mx.\frac{d^2y}{dt^2} - S.x'Y'm' + S.m'x'\frac{d^2y'}{dt^2} \end{aligned}\right\} = 0.$$

Cette équation peut être mise sous une forme plus simple; en effet en soustrayant le produit de la seconde des équations (r'') par x, de celui de la première par y, on a

$$My.\frac{d^2x}{dt^2}-Mx.\frac{d^2y}{dt^2}=y\times S.X'm'-x\times S.Y'm';$$

ce qui change notre équation en

$$S.X'm'y'-S.Y'm'x'-S.\frac{d^2x'}{dt^2}m'y'+S.\frac{d^2y'}{dt^2}m'x'=0$$

ou $$S.m'\frac{x'd^2y'-y'd^2x'}{dt^2}=S.m'(Y'x'-X'y').$$

L'intégrale du premier membre, prise par rapport au tems, est $S.m'\frac{x'dy-y'dx'}{dt}$. En opérant de même pour les deux autres axes, et faisant, pour abréger,

$$\left.\begin{aligned} S\left\{m'.\int(Y'x'-X'y')\,dt\right\}&=N\\ S\left\{m'.\int(Z'x'-X'z')\,dt\right\}&=N'\\ S\left\{m'.\int(Z'y'-Y'z')\,dt\right\}&=N''\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ (s'')$$

on aura pour les trois autres équations du mouvement

$$\left.\begin{aligned} S.m'\frac{x'dy'-y'dx'}{dt}&=N\\ S.m'\frac{x'dz'-z'dx'}{dt}&=N'\\ S.m'\frac{y'dz'-z'dy'}{dt}&=N''\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ (t'').$$

Il résulte de là plusieurs conséquences importantes.

260. 1°. Les trois équations (r'') ne renferment pas x', x'',...; elles se rapportent donc à des circonstances de mouvement indépendantes de celui des molécules, et propres uniquement au centre de gravité. Elles serviront à déterminer ce mouvement, quel que soit celui des molécules du corps : de sorte que ce mouvement ne dépendra nullement de l'action mutuelle qu'elles exercent

les unes sur les autres; il dépendra seulement des forces accélératrices qui les sollicitent : c'est en quoi consiste le principe de *la conservation du mouvement du centre de gravité.*

Au reste, si on conçoit toute la masse du corps réunie en un point unique sur lequel agiroient les forces X', Y', Z', etc., il est visible que toutes ces forces seroient réduites à trois qui solliciteroient un point dont la masse seroit M : mais alors les équations (r''), qui sont destinées à déterminer le mouvement du centre de gravité du corps, deviendroient celles qu'on a trouvées n°. 166, (c'), d'où résulte ce théorême général, que *le mouvement du centre de gravité d'un corps libre quelconque, est toujours le même que si ce corps étoit réuni en un seul point sollicité par les mêmes forces accélératrices dont les parties du corps étoient animées dans leur état naturel.* Ceci s'accorde avec ce qu'on a dit (255).

261. 2°. Les équations (t'') ne renferment pas les coordonnées x, y, z du centre de gravité, et sont par conséquent destinées à faire connoître les diverses positions des parties du corps, par rapport aux trois axes mobiles qui passent par ce centre : ces équations ne seront en rien altérées si on applique au centre de gravité des forces qui le retiennent en repos, puisque les valeurs de N, N' et N'' ne peuvent renfermer les puissances qui passent par ce centre (27, 41) : donc le mouvement de rotation que les équations (t'') déterminent, est le même que si ce centre étoit fixe.

Ainsi *lorsqu'un corps sera soumis à l'action de diverses forces accélératrices, il aura un double mouvement; le premier sera une translation de son centre de gravité, comme si toutes ces forces agissoient parallèlement à leurs di-*

rections sur ce point, auquel on imagineroit la masse concentrée : le second sera un mouvement de rotation autour du centre de gravité comme si ce point étoit fixe. Ce qui est relatif à la translation du centre de gravité, est renfermé dans ce qu'on a dit sur le mouvement d'un point. Quant au mouvement de rotation, puisqu'il est le même que si ce centre étoit fixe, il suffit de recourir à ce qui a été dit (246). Alors la formule (m'') donne la force accélératrice angulaire : mais comme le moment d'inertie est pris par rapport à un axe passant par le centre de gravité, cette formule se réduit à $\frac{du}{dt} = \frac{s(\varphi pm)}{Mk^2}$.

262. 3°. Si le corps n'est mu que par une impulsion primitive; on a $X' = 0$, $Y' = 0$, etc. Les équations (r''), qui déterminent le mouvement du centre de gravité, se réduisent donc à $M\frac{dx}{dt} = A$, $M\frac{dy}{dt} = A'$, $M\frac{dz}{dt} = A''$; comme ce qu'on a fait n°. 169 s'applique ici, on en conclut aisément que le mouvement du centre de gravité est rectiligne et uniforme, et que sa vîtesse est la même que si la force impulsive agissoit immédiatement sur lui; ce qui est conforme à ce que nous avons déja démontré (255).

263. 4°. Faisons sur les valeurs (s'') les mêmes raisonnemens qu'au n°. 170 : il est clair que $Y'x' - X'y'$ est le moment, par rapport à l'axe des z, de la résultante des forces X' et Y'; or ce moment est nul, soit quand X' et Y' sont nuls, soit lorsque la résultante de ces deux forces passe par l'axe des z. Ainsi N, N' et N'' sont des constantes dans deux cas; 1°. lorsque le système n'est soumis à l'action d'aucune force accélératrice, et n'est mu que par une impulsion; 2°. lorsque toutes les forces passent par l'origine.

Cela posé, si on projette la masse m' sur le plan des x et des y, la différentielle $x'dy' - y'dx'$ sera (170) la moitié de l'aire que trace dans l'instant dt le rayon vecteur mené de l'origine des coordonnées à la projection de m'. La somme de ces aires élémentaires multipliées respectivement par les masses est donc $= Ndt$, et proportionnelle à l'élément du tems : d'où il suit que dans un tems fini elle est $= Nt$, et proportionnelle au tems : il en est de même des deux autres plans coordonnés. C'est en cela que consiste le *principe de la conservation des aires.*

264. 5°. Multiplions les équations (r'') par dx, dy et dz respectivement, ajoutons et intégrons, ainsi que nous avons déja fait n°. 168, il viendra, à cause de . . . .

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \frac{ds^2}{dt^2},$$

$$M\frac{ds^2}{dt^2} = A + 2S\{mf(X'dx' + Y'dy' + Z'dz'\},$$

Or toutes les fois que $X'dx' + Y'dy' + Z'dz'$ sera une intégrale exacte, ce qui renferme presque tous les cas de la nature, car on n'a à considérer le plus souvent que des forces attractives dirigées vers des points fixes, (voyez Mécanique céleste, n°. 19) en désignant cette intégrale par φ, on aura

$$Mv^2 = A + 2S.m\varphi \ldots\ldots\ (u'').$$

Cette équation renferme le principe connu sous le nom de *conservation des forces vives;* voici en quoi consiste ce principe. La somme des forces vives (226), ou la force vive totale du système est constante si le système n'est sollicité par aucune force ; et si ces parties sont animées par des forces, elle est la même lorsque ces parties sont

libres que lorsqu'elles sont liées entr'elles d'une manière quelconque. Cela résulte visiblement de l'équation précédente, puisque la quantité $A + 2S.m\varphi$ ne dépend que des forces accélératrices qui agissent sur le systeme : mais il faut pour cela que la liaison de ces parties ne varie pas avec le tems, et que $d\varphi$ soit une différentielle exacte.

Fin de la Dynamique.

LIVRE III.

HYDROSTATIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

De l'équilibre des fluides en général.

I. *Proposition fondamentale.*

265. Quoique la figure des molécules d'une masse fluide quelconque nous soit inconnue, nous ne pouvons douter qu'elles ne soient matérielles, et que par conséquent les lois générales de l'équilibre ne leur conviennent comme aux corps solides. La propriété principale des fluides, et la seule qui les distingue des corps solides (1), consiste en ce que leurs parties cèdent à la moindre force, et peuvent se mouvoir entr'elles avec toute la facilité possible, quelle que soit d'ailleurs la liaison et l'action mutuelle de ces parties. Si cette propriété étoit traduite en calcul, les lois de l'équilibre des fluides n'exigeroient pas une théorie particulière; elles formeroient un cas particulier des propositions générales de la Statique.

La petitesse des molécules des fluides, et leur mobilité excessive est, il est vrai, un caractère propre à servir de base à l'hydrostatique, puisque, commun à tous les fluides, il n'appartient qu'à eux : mais cette propriété est bien peu susceptible de se prêter aux symboles analytiques. Voici le

principe que *Clairault* (*) a pris pour base de l'Hydrostatique, et que nous suivrons nous-mêmes.

266. *Si on conçoit un vase* ABC, *de forme et dimensions quelconques, contenant une masse fluide, et un canal* DEFG *de figure arbitraire, et rentrant en lui-même; il est clair que l'équilibre ne sauroit y exister, à moins que les efforts de toutes les parties qui sont comprises dans ce canal ne se détruisent mutuellement.* Cela est fondé sur ce que l'équilibre d'une masse fluide exige celui de toutes ses parties : or si on suppose que tout devient solide, à l'exception du canal *DEFG*, il est visible que si la masse fluide est en équilibre, cet état aura également lieu dans ce canal; et réciproquement que l'équilibre a lieu, si ce canal a une figure et une position quelconque. Fig. 124.

267. Il suit de là que *si on prend sur le canal* DEFG *deux points quelconques* D *et* F, *les effets des deux parties* DEF, DGF *l'une contre l'autre, seront égaux;* car sans cela il y auroit un courant perpétuel.

268. Avant d'aller plus loin, nous rappellerons ici ce qui a été dit (47 et 222) sur les pressions en général. Nous avons vu que lorsque des forces étoient détruites par la résistance que leur opposoit un corps solide, il falloit que la résultante de ces forces fût normale à la surface de ce corps : la *pression* est cette résultante; de sorte qu'elle est égale et directement opposée à la puissance qui mettroit le système en équilibre si l'obstacle n'existoit pas. De plus, cette force est mesurée par le produit de la masse sur laquelle elle agit, multipliée par l'élément de

(*) Théorie de la figure de la terre.

vîtesse qu'elle est capable de lui imprimer durant le premier instant. Comme un poids posé sur un plan horisontal exerce sur ce plan une pression que nous sommes habitués à considérer, on mesure ordinairement les pressions qu'éprouve une surface en vertu des forces qui agissent sur elle, par celle qu'exerceroit le poids d'un prisme. Ainsi soit p la pression qu'éprouve la surface a : on peut toujours trouver un prisme de matière quelconque, dont la base soit a, et dont le poids exerce la même pression p sur un plan horisontal : il ne faut pour cela que donner à ce prisme une hauteur convenable, laquelle dépend de la substance dont il est formé.

Fig. 125. 269. Soit un vase ABC exactement fermé de toutes parts et rempli de fluide : nous ne supposons ici aucune force agissant sur les diverses molécules de cette substance, et par conséquent nous la regardons comme non pesante. Imaginons qu'une force P agit sur ce fluide, supposé en équilibre et dans l'impossibilité de s'échapper par aucun orifice : on conçoit pour cela un *Piston* (*) PD adapté à l'une des parties du vase. Soit en M ou en E une surface plane $= A$, et égale à la section transversale du piston; elle sera pressée avec la même énergie que si le piston PD lui étoit immédiatement appliqué. En effet, si on conçoit que de l'aire M ou E on ait conduit en D un canal, qu'à l'exception du fluide qui y est contenu, tout le reste soit devenu solide : de plus, si on adapte en M ou en E un autre piston soumis à l'action d'une force $Q = P$; il est clair que l'état d'équilibre devra encore subsister ;

(c) Un piston est un corps fermant exactement un cylindre dans lequel on le fait entrer, et où il peut se mouvoir librement dans le sens de son axe.

car, en général, l'équilibre d'un système de corps n'est point troublé, en supposant que plusieurs d'entr'eux viennent à s'unir ou à s'attacher à des points fixes. De là il suit qu'on peut, ou employer ce nouveau piston pour produire l'équilibre, ou laisser simplement le vase fermé en D.

On doit conclure de là que si on dispose tant de pistons qu'on voudra, de bases égales et sollicités par des forces égales, il y aura équilibre. Or l'une de ces forces peut être regardée comme faisant équilibre à toutes autres : de plus, la distance entre les bases est ici arbitraire, et on peut la supposer nulle : donc la force agissant sur un piston dont la base est A, fait équilibre à la puissance nP agissant sur un piston dont la base est nA. Soit $nP = p$, et $nA = a$, nous aurons donc $\frac{P}{p} = \frac{A}{a}$, ou

$$pA = aP \ldots\ldots\ldots (\alpha).$$

On rapporte ordinairement les pressions à l'unité de surface, c'est-à-dire, qu'on suppose que l'aire pressée $= 1$; si donc $A = 1$, on a $p = aP$: ce qui apprend que *pour trouver la pression qu'éprouve la surface* a, *il faut multiplier par* a *celle qu'éprouve l'unité de surface.*

270. L'équation (α) donne $p = \frac{a}{A} \times P$; on peut donc par l'intermède d'un fluide incompressible, produire avec une puissance arbitraire P une pression p aussi grande qu'on voudra. Il ne s'agira pour cela que de prendre les aires a et A des bases des pistons dans un rapport convenable ; c'est sur ce principe qu'est fondée la presse de *Pascal.* Consultez le *Traité de l'équilibre des liqueurs* dont cet illustre savant est l'auteur.

II. *Equation d'équilibre d'une masse fluide ; pressions qu'exercent ses diverses molécules.*

271. Supposons qu'une masse fluide a ses parties les plus intimes soumises à l'action de forces de grandeurs et directions connues ; cherchons les conditions auxquelles ces forces doivent satisfaire pour que l'équilibre du fluide soit possible, et la pression qui est exercée en un point déterminé de sa masse.

Fig. 126. Pour cela concevons trois axes rectangulaires AX, AY et AZ, disposés dans le fluide : nommons x, y et z les trois coordonnées AP, PN et NM du point M. Pour avoir une idée nette de la pression que le fluide exerce en ce point, il faut imaginer qu'une surface plane y est placée dans une position quelconque : comme les molécules fluides sont supposées soumises à l'action de diverses puissances, tous les points de cette surface plane éprouvent des pressions, et on veut assigner en particulier celle qu'éprouve l'élément de cette surface qui est située en M, et dont nous représenterons l'aire par a. Imaginons un canal IM de *figure quelconque*, dont la section normale soit par-tout $= a$, et dont la direction soit normale en M au plan dont nous venons de parler.

Décomposons les forces qui agissent sur la molécule fluide placée en M, en trois autres X, Y et Z parallèles aux trois axes : pour plus de généralité, ces forces sont supposées variables d'une molécule fluide à l'autre, aussi bien que la densité du fluide que nous désignerons par D ; ainsi X, Y, Z et D sont des fonctions de x, y et z. Le petit cylindre Mm, normal au plan, a chacune des particules fluides qui le composent sollicitée par les forces X, Y et Z. Soient $F(x, y, z) = 0$, et $f(x, y, z) = 0$

les équations de ce canal, (ou plutôt de son axe); $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ sont les cosinus des angles formés par l'élément Mm du canal et les axes, s étant la longueur IM. Donc $X.\frac{dx}{ds}$, $Y.\frac{dy}{ds}$, $Z.\frac{dz}{ds}$ sont les trois composantes des forces X, Y, Z, dans le sens de Mm : chaque molécule fluide contenue dans Mm est donc sollicitée par la force $X.\frac{dx}{ds} + Y.\frac{dy}{ds} + Z.\frac{dz}{ds}$. De plus le volume du cylindre Mm étant ads, sa masse (51) est $aDds$: donc la force motrice qui le sollicite est $Da(Xdx + Ydy + Zdz)$.

Si on se sert des équations du canal, il sera aisé d'éliminer de cette expression deux des trois variables x, y et z : elle ne sera donc fonction différentielle que de la troisième; en intégrant dans les limites déterminées par les extrémités I et M du canal, on aura l'effort total qu'exerce tout le fluide contenu dans ce canal pour s'échapper par l'orifice M. Or il est manifeste que la pression qu'éprouve l'élément a, placé en M, n'est autre que cet effort, puisque le canal est normal au plan, et que le fluide qui l'environne ne peut produire de pression sur cet élément, que par l'action qu'il exerce sur l'orifice I, action qui est entrée en considération lorsqu'on a intégré. Si donc on représente par p la pression exercée sur l'unité de surface, ap sera (269) celle qu'éprouve l'élément a : donc on a

$$p = \int D(Xdx + Ydy + Zdz) \ldots\ldots (6).$$

On ne suppose ici p constant sur l'unité de surface que comme terme de comparaison : ainsi pour ne rien laisser à desirer, et lever toute obscurité, il faut concevoir qu'un prisme dont la base est l'unité, et dont le poids est p, est posé sur un plan horisontal; chaque élément $= a$

de sa base éprouve la même pression que le fluide exerce en M.

272. Tout ce qu'on vient de dire doit également avoir lieu quelque forme qu'on attribue au canal; et puisque la quantité $D(Xdx + Ydy + Zdz)$ doit pouvoir être intégrée quelles que soient les équations de ce canal, il s'ensuit qu'elle doit être une différentielle exacte. Sans cette condition les forces qui agissent sur les molécules ne seroient pas de nature à se faire équilibre, et le fluide auroit toutes ses parties dans une perpétuelle agitation. Il faut donc qu'on ait les équations

$$\frac{d.DX}{dy} = \frac{d.DY}{dx}, \quad \frac{d.DX}{dz} = \frac{d.DZ}{dx}, \quad \frac{d.DY}{dz} = \frac{d.DZ}{dy}.$$

En exécutant les différentiations, et multipliant la première de ces équations par Z, la seconde par $-Y$, et enfin la troisième par X, puis ajoutant, le facteur commun D disparoit, et on a pour la condition d'équilibre de la masse du fluide

$$X\left\{\frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy}\right\} + Y\left\{\frac{dZ}{dx} - \frac{dX}{dz}\right\} + Z\left\{\frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx}\right\} = 0 \ldots (\gamma).$$

Si la densité D du fluide est la même dans toute l'étendue de sa masse, D est constant, et on retrouve les équations (e', 168). L'expression (γ) doit donc encore être satisfaite.

L'intégrale de la fonction $D(Xdx + Ydy + Zdz)$ pourra donc être aisément trouvée par les quadratures (voyez le Calc. int. élém. de *Lacroix*, 309 et 310) et cela sans qu'il soit nécessaire, comme nous l'avions supposé d'abord, d'en éliminer deux variables. x, y et z représentent, dans l'intégrale, les coordonnées de la surface

pressée a ; et comme la disposition de cette surface n'entre pas dans le résultat, on en conclut que la grandeur de la pression reste la même lorsqu'on fait varier l'inclinaison de cet élément, sans qu'il cesse d'être situé dans le même lieu du fluide : alors la direction de la pression est la seule chose qui change. L'intégrale exige l'addition d'une constante dont la valeur dépend de la pression à l'orifice I du canal : mais comme cet orifice est en un lieu quelconque du fluide, il est clair qu'il suffit de connoître la valeur de la pression en un lieu déterminé du système, tel, par exemple, qu'à la surface du fluide.

Si le point M pour lequel on demande la pression est à la surface libre du fluide, alors l'intégrale de la fonction $D(Xdx + Ydy + Zdz)$ donne la pression qui a lieu au point de cette surface dont les coordonnées sont x, y et z. Il est d'ailleurs visible que la pression est normale à cette surface : or pour tous les points qui la composent la pression est évidemment la même, ou nulle : ainsi $p = C$, d'où $dp = 0$; donc

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0 \ldots\ldots (\delta).$$

est l'équation de la surface du fluide : on intégrera, et on déterminera la constante en ayant égard à la pression C qui a lieu à cette surface.

273. Faisons des applications des formules précédentes.

1°. Supposons que les molécules fluides sont toutes sollicitées par des forces dirigées vers un point fixe, pris pour origine : soit r la distance du centre d'attraction au point qui a x, y et z pour coordonnées, ce qui donne $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$; cette ligne r fait avec les trois axes des angles dont les cosinus sont $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$ et $\frac{z}{r}$. Désignons par φ la force qui agit sur la molécule placée au point dont

nous parlons ; $\frac{\varphi x}{r}$, $\frac{\varphi y}{r}$ et $\frac{\varphi z}{r}$ sont ses composantes dans le sens des axes ; on doit les prendre négativement, parce qu'elles tendent à diminuer les coordonnées ; et il faut substituer ces valeurs dans les équations précédentes, à X, Y et Z.

On peut d'abord aisément reconnoître que l'équation (γ) est satisfaite ; ainsi l'équilibre est possible dans le système. De plus l'équation (δ) devenant $xdx + ydy + zdz = 0$, en supprimant le facteur commun $-\frac{\varphi}{r}$; on obtient en intégrant $x^2 + y^2 + z^2 = C^2$. Comme cette équation est celle d'une sphère qui a C pour rayon, on en conclut que la masse fluide devra affecter la forme sphérique, pour que l'équilibre puisse exister en vertu des forces φ qui animent ses molécules. Telle seroit la figure des planètes, si elles avoient été originairement fluides, et si le mouvement de rotation qui les anime n'avoit déterminé une force centrifuge dont l'effet a dû les aplatir vers leurs pôles et les élever à l'équateur.

Supposons que la force d'attraction φ soit proportionnelle à la puissance n de la distance r au centre, et que la densité D soit constante : on a $\varphi = Ar^n$, ce qui change l'équation (ζ) en $p = AD\int r^{n-1}(xdx + ydy + zdz)$; or $xdx + ydy + zdz = \frac{1}{2}d(r^2) = rdr$; donc

$$p = AD\int r^n dr = \frac{AD}{n+1} \times \sqrt{\left\{x^2+y^2+z^2\right\}^{n+1}} + C.$$

Telle est la valeur de la pression (rapportée à l'unité de surface) qu'éprouve le point qui a pour coordonnées x, y et z.

2°. Lorsque les molécules fluides ne sont soumises à d'autre force qu'à la gravité, en prenant l'axe des z ver-

tical, on a $X = 0$, $Y = 0$ et $Z = -g$. On voit que l'équation (γ) étant satisfaite, l'équilibre est possible; que de plus l'équation (δ) se réduisant à $-gdz = 0$, ou $z = \text{const.}$, la surface supérieure du fluide est parallèle au plan xy, c'est-à-dire, horisontale, lorsque l'équilibre a lieu. Enfin la valeur de la pression en un point quelconque du fluide est

$$p = -\int Dgdz. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\varepsilon).$$

Cette équation a lieu pour tous les fluides pesans. Lorsque la densité D est constante, ce qui arrive pour tous les fluides incompressibles, ou qu'elle est fonction de z seul, on remarque que la pression ne varie qu'avec la hauteur z; ce qui fait voir que *toutes les molécules qui sont situées sur un même plan horisontal sont également pressées, et réciproquement.* Ces diverses propriétés des fluides pesans servent de base à une foule de considérations importantes qu'il convient de développer; c'est ce dont nous allons nous occuper.

On distingue deux sortes de fluides : les uns, tels que l'eau, le vin, le mercure . . . sont *incompressibles*; leur densité est constante; on les nomme *liquides*; les autres sont compressibles et *aériformes*; on les appelle *fluides élastiques*, parce qu'ils ont aussi la faculté de se rétablir : tels sont les gaz et l'air atmosphérique. Nous allons successivement examiner les propriétés de ces deux sortes de fluides.

CHAPITRE II.

DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES ET PESANS.

I. *Des Syphons et Niveaux ; pressions exercées sur les parois des vases.*

274. PUISQUE la surface du fluide est horisontale, quelle que soit la figure du vase qui le contient, on voit que si plusieurs tuyaux de courbure arbitraire se communiquent entr'eux, le fluide pesant qui y sera renfermé devra s'élever dans chacun à la même hauteur. On a donné à ce système le nom de *Syphons*, et c'est sur ce principe que la construction du *Niveau d'eau* est fondée. Cet instrument, qui n'est qu'un syphon à deux branches, consiste en un canal EF plus ou moins long, aux extrémités duquel sont lutées deux fioles recourbées AE, BF; si on verse de l'eau dans l'une d'elles, ce fluide, après avoir empli le canal EF, s'élevera dans la fiole BF, et toute droite qui passera par les deux surfaces A et B sera horisontale. On adapte à cet assemblage un pied en C, afin de pouvoir se servir par-tout de cet instrument, dont l'usage est trop connu pour que nous nous y arrêtions ici.

Fig. 127.

275. L'instrument appelé *Niveau à bulle d'air* est fondé sur le même principe, et remplit le même objet : il est composé d'une boîte CD de métal, qui renferme un tube de verre, et le recouvre entièrement, à l'exception d'une partie qu'on voit paroître par une ouverture ou fenêtre de

Fig. 128.

pratiquée à la boîte *CD*. Le tube, fermé hermétiquement, contient une liqueur, qui est ordinairement de l'alkool ou de l'éther, et qui n'en remplissant pas entièrement la capacité, laisse un petit vide *ab* occupé par l'air. L'instrument doit être disposé de manière que, lorsque les extrémités *a* et *b* de la bulle d'air sont également distantes d'un point *m* qui a une position constante sur le tube, l'axe soit horisontal. Ce point milieu n'est pas marqué sur le tube ; mais il y a de chaque côté, et dans l'espace où les extrémités de la bulle se trouvent renfermées, dans différentes températures, un certain nombre de divisions égales qui y sont numérotées, et on règle l'instrument de manière que son axe soit horisontal, quand les extrémités de la bulle sont sur deux divisions de même numéro.

On adapte souvent à cet instrument une lunette, dont l'axe optique est parallèle à l'axe du niveau ; et pour donner plus de sensibilité à l'instrument, on travaille intérieurement le tube de verre, de manière que sa section longitudinale intérieure soit un arc de cercle. Nous ne pouvons entrer ici en détail sur la propriété du niveau, les procédés de nivellement, les corrections des réfractions, etc. On peut consulter à cet égard l'*Architecture hydraulique*, n°. 546.

276. Lorsque la densité *D* est constante, comme on peut prendre pour le plan *xy* la surface du fluide (ce qui force à compter les *z* positifs de haut en haut) l'équation (•) devient

$$p = C + Dgz.$$

De plus, lorsqu'on fait $z = 0$, on a $p = C$; donc C est la pression exercée sur chaque unité de la surface du fluide ; elle répond au poids de l'atmosphère, et est nulle quand on en fait abstraction. On peut représenter C, par

le poids d'un prisme du même fluide, en donnant à ce prisme la hauteur h, et une base égale à l'unité : alors on a $Dgh = C$, puisque h est le volume de ce prisme, Dh sa masse (51), et Dgh son poids (222). Ainsi l'équation précédente équivaut à

$$p = Dg(h + z) = \varpi(h + z) \ldots\ldots (\zeta),$$

en faisant $Dg = \varpi$. La valeur de h sera d'ailleurs connue lorsqu'on aura Dg et C : de plus ϖ est *le poids absolu de l'unité de volume* du fluide ; c'est ce qu'on nomme sa PESANTEUR SPÉCIFIQUE. Nous en donnerons bientôt la valeur pour chaque espèce de substance (295).

277. Puisque la pression exercée dans toute l'étendue d'un plan horisontal est la même, il en résulte que celle qu'éprouve une surface horisontale A, dont Z est l'enfoncement dans le fluide, est (269), $\varpi A(Z + h)$. Cette valeur se compose de la pression ϖAh qui seroit éprouvée à la surface du fluide, et de celle ϖAZ qui est le poids d'un volume de fluide égal à AZ. Ainsi en faisant abstraction de la première partie, on voit que *la pression qu'éprouve l'aire horisontale* A, *est le poids d'un prisme de fluide qui a cette aire* A *pour base, et pour hauteur sa distance à la surface du fluide.*

Cette conséquence s'applique immédiatement à la pression exercée sur le fond horisontal des vases ; il en résulte un fait assez singulier.

Fig. 129. Si on a trois vases dont les fonds horisontaux AB, EF et CD soient égaux, et dans lesquels un même fluide incompressible soit contenu et s'élève à même hauteur ; la pression sera égale sur les fonds de ces vases, dont la forme est d'ailleurs arbitraire. Ainsi cette pression sera moindre ou plus grande que le poids du fluide qui y est

renfermé, ou même égale à ce poids, suivant que le vase aura l'une des trois formes de la fig. 129. On doit donc bien distinguer le poids du fluide de la pression.

Ce résultat est confirmé par l'expérience : on emplit d'eau un vase tel qu'un tonneau, on y adapte un tuyau vertical très-élevé qu'on emplit du même fluide ; la pression exercée sur le fond du tonneau étant le poids d'un prisme d'eau qui a pour base le fond même, et pour hauteur celle à laquelle ce fluide s'élève dans le tuyau ; le tonneau ne peut résister à un aussi grand effort, ses douves s'écartent et laissent échapper l'eau.

278. L'équation (ζ) montre que p croît avec z : ainsi lorsqu'un vase est destiné à contenir une grande masse de fluide, les parties les plus enfoncées supportent une plus forte pression que les autres. Si donc on doit former un assemblage de tuyaux verticaux, destinés à élever l'eau ou tout autre fluide, c'est se jetter dans une dépense superflue que de donner la même épaisseur à toutes les parties. Car si les inférieures ont une épaisseur suffisante, comme elles doivent l'avoir en effet, les parties supérieures en ont nécessairement trop. Il convient donc alors d'avoir des tuyaux d'assemblage de même diamètre intérieur, mais d'épaisseurs différentes : de placer en bas les tuyaux les plus épais, et successivement les autres, à raison des différentes hauteurs de l'eau.

Pour trouver en général l'épaisseur que doivent avoir les tuyaux de conduite, il faudroit, par des expériences faites avec exactitude, déterminer la force d'adhérence des différentes substances qu'on emploie pour former ces tuyaux. Nous nous écarterions trop de notre objet en traitant ici cette matière, sur laquelle on peut consulter l'Hydrodynamique de Bossut.

279. Cherchons maintenant la pression exercée par un fluide pesant et incompressible sur une surface plane, qui y est disposée d'une manière quelconque : cela s'applique naturellement aux parois latéraux des vases, et même à leurs fonds, lorsqu'ils ne sont pas horisontaux. Si on prend seulement un des élémens a' de la surface en question, l'équation (ζ) donne pour la pression qu'exerce le fluide sur cet élément a' (269), $pa' = \varpi a'z$, en faisant abstraction de la pression exercée à la surface supérieure du fluide, laquelle se distribue également sur tous les points de la surface pressée, quelle qu'en soit l'inclinaison (269). Cela posé, nommons a', a'', ... les divers élémens de cette surface ; z', z'', ... les distances de tous ces élémens à la surface supérieure du fluide, qui est le plan des xy, on aura $\varpi a'z'$, $\varpi a''z''$. .... pour les pressions qu'ils éprouvent. Ces pressions forment un système de forces normales au plan qu'on considère ; leur résultante R sera visiblement égale à leur somme, car ces forces sont parallèles entr'elles ; elle sera donc

$$R = \varpi(a'z' + a''z'' + \text{etc.})$$

Désignons par A l'étendue de la surface pressée, on a $A = a' + a'' + \ldots$. De plus $a'z'$, $a''z''$, ... sont les momens, par rapport au plan de la surface du fluide, des élémens a', a'', ... qui composent l'aire A. Or en désignant par Z la distance du centre de gravité de cette aire à la surface supérieure du fluide, on a (54) ... $AZ = a'z' + a''z'' + \ldots$: donc on a $R = \varpi AZ$ pour la pression cherchée. Or AZ est le volume d'un prisme qui a A pour base et Z pour hauteur : de plus ϖ est la pesanteur spécifique du fluide, ou le poids de l'unité de volume de ce fluide (276) ; ainsi ϖAZ est le poids d'un volume de fluide égal à celui de ce prisme Donc *la*

résultante des pressions qu'exerce un fluide pesant sur une surface plane qui y est plongée et dans une position quelconque, est le poids d'un prisme de ce fluide qui a pour base cette surface, et pour hauteur l'enfoncement de son centre de gravité dans le fluide.

Il est important de remarquer que toutes les surfaces planes plongées dans un fluide, éprouvent des pressions égales lorsque les aires sont égales, pourvu que les enfoncemens de leurs centres de gravité soient les mêmes. De sorte qu'on peut, sans changer la grandeur de cette pression, mettre une surface plongée dans toutes les positions possibles, pourvu que son centre de gravité reste à la même distance de la surface du fluide. Donc *toute surface plane, plongée dans un fluide, éprouve des pressions, dont la résultante ne change pas de grandeur, lorsqu'on fait mouvoir cette surface autour de son centre de gravité pour la disposer horisontalement.* Cette résultante change d'ailleurs de direction et de position.

280. Le *centre de pression* est le point par lequel passe la résultante : ce centre est facile à assigner, d'après ce qu'on a dit (36) puisqu'il ne s'agit que de connoître la position de la résultante d'un système de forces parallèles. Supposons que chacune des pressions élémentaires devienne horisontale, ce qui ne change rien au point d'application de la résultante (37). Soit z l'enfoncement du centre de pression, il ne s'agit que d'égaler le moment Rz de la résultante, par rapport à la surface du fluide, à la somme des momens $\varpi a'z'^2$, $\varpi a''z''^2$, ... des pressions élémentaires $\varpi a'z'$, $\varpi a''z''$, ...; ce qui donne . . . . . $Rz = \varpi AZz = \varpi(a'z'^2 + a''z''^2 + \ldots)$ ou $AZz = S.a'z'^2$. Ainsi la distance z du centre de pression à la surface du fluide est

$$z = \frac{S.a'z'^2}{AZ} = \frac{\varpi}{R} \times S.a'z'^2 \ldots\ldots (9).$$

Pour faire usage de cette formule il faudra exprimer l'aire élémentaire a' en fonction des différentielles des coordonnées ; mettre pour z'^2 sa valeur donnée en x et y par l'équation du plan pressé, et intégrer $a'z'^2$ dans les limites déterminées par la figure de l'aire plane qu'on considère. Cette formule (9) ne fait d'ailleurs connoître le centre de pression que dans le cas où on connoît *à priori* une ligne qui le contient, ce qui a lieu lorsque l'aire pressée est partagée en deux portions symétriques par un plan vertical : mais dans tout autre cas, il suffira de prendre les momens des pressions élémentaires $\varpi a'z'$, $\varpi a''z''$, ... par rapport à un plan vertical, perpendiculaire à celui qu'on considère : en opérant comme ci-dessus, on obtiendroit la distance du centre de pression à ce plan vertical, et par conséquent sa position.

281. En général, toute cette théorie s'applique à la poussée des eaux stagnantes contre les digues qui s'opposent à leur écoulement. Consultez à ce sujet l'*Architecture hydraulique* de *Prony*, pag. 279, et les *Recherches sur la construction des Digues*, par *Bossut* et *Viallet*.

Nous nous bornerons ici à appliquer ces principes généraux à la pression contre la vanne rectangulaire d'une écluse : soit m son côté horisontal, n sa hauteur depuis la partie inférieure jusqu'au niveau de l'eau. On a $A = mn$; et comme le centre de gravité est au milieu de la hauteur n, $Z = \frac{1}{2}n$. Il suit de là que, 1°. la pression est $R = \frac{1}{2}\varpi mn^2$; 2°. le centre de pression est visiblement sur la ligne verticale qui passe par le milieu de la base m ; 3°. en prenant pour élément a' un rectangle horisontal qui ait dz' pour sa hauteur, et m pour sa base, on a $a' = mdz'$: ainsi

$S.a'z'^2 = S.mz'^2dz' = \frac{1}{3}mz'^3$. Or les limites sont $z' = 0$ et $z' = n$; cette intégrale devient donc $\frac{1}{3}mn^3$: ainsi on a pour l'enfoncement du centre de pression $z = \frac{3}{4}n$.

Comme nous allons exposer avec détail la théorie de l'équilibre des corps flottans, nous ne dirons rien ici sur les pressions exercées sur les surfaces courbes, parce que l'une rentre dans l'autre.

II. *Conditions d'équilibre des corps flottans.*

282. Examinons maintenant ce qui arrive lorsqu'un corps flotte sur un fluide pesant. Soit $dz = pdx + qdy$ l'équation différentielle de la surface plongée : p et q sont les coefficiens des différences partielles de z dans l'équation de cette surface, qu'on suppose ici rapportée au *plan de flottaison* (c'est-à-dire à la surface du fluide), comme plan des xy. Si on fait, pour abréger, $M = \sqrt{(1+p^2+q^2)}$, on se rappelle que (voyez les feuilles de *Monge*; 3, *X* et 4) les angles que forme la normale Nm au point m (qui a pour coordonnées $AP = x$; $PQ = y$, $Qm = z$), ont pour cosinus respectivement $\frac{p}{M}$, $\frac{q}{M}$ et $\frac{1}{M}$. Fig. 120.

Cela posé, concevons un élément mm' de la surface, projetté sur le plan xy suivant le rectangle $Qq = dxdy$: cet élément se confond avec le plan tangent à la surface, et fait, avec le plan de flottaison, un angle égal à celui que forme la normale Nm avec l'axe des z, auquel la verticale mB est parallèle; car ces droites sont perpendiculaires respectivement à ces plans. Il suit de là que l'élément mm' a pour aire le quotient de la projection $Qq = dxdy$, divisée par le cosinus $\frac{1}{M}$ de l'angle NmB : ainsi cette aire est $mm' = Mdxdy$.

De plus, la pression (ζ) sur l'unité de surface étant $= \varpi z$, en faisant abstraction du poids de l'air; celle qu'éprouve l'élément mm' est $\varpi Mzdxdy$, et ses composantes dans les sens des axes des x, des y et des z, sont

$$\varpi zpdxdy,\ \varpi zqdxdy,\ \varpi zdxdy.$$

Ces trois valeurs étant intégrées dans les limites que prescrit la partie pressée qu'on considère, donneront les pressions parallèles aux axes, éprouvées par cette partie de la surface plongée : et on ne pourra réduire ces pressions à une seule que dans des cas particuliers (44). Quant à l'intégration, elle se pratique en suivant les mêmes principes que lorsqu'il s'agit d'évaluer l'aire d'une portion de surface courbe, lorsqu'on connoît la projection de ses limites sur le plan xy. Ainsi il faudra remplacer z, p et q par leurs valeurs en fonction de x et y, déduites de l'équation de la surface, et intégrer successivement par rapport à ces deux variables dans les limites désignées.

Appliquons ces considérations au cas où on veut évaluer les pressions exercées sur la partie entière qui est plongée dans le fluide. Soit $HOKL$ la projection de cette partie sur le plan xy : il faudra intégrer d'abord par rapport à y, depuis $y = PK$ jusqu'à $y = PH$; et comme PK et PH sont des fonctions connues de x, on devra intégrer ensuite les résultats depuis $x = AE$ jusqu'à $x = AF$. Opérons d'abord sur la quantité $\varpi zqdxdy$; l'intégrale par rapport à y exige qu'on regarde x comme constant; ainsi on a $\varpi dx\int zqdy$; et comme $qdy = dz$ lorsque x est constant, l'intégrale est $\frac{1}{2}\varpi z^2dx$. Il s'agit d'intégrer ce résultat par rapport à x; mais avant tout, comme l'intégrale précédente a dû être prise depuis $y = PK$ jusqu'à $y = PH$, et qu'aux deux points H et K on a $z = 0$, il suit de là que si on veut substituer dans $\frac{1}{2}\varpi z^2dx$, pour z, sa

valeur en x et en y, et prendre cette quantité entre les deux limites, elle devra se trouver nulle. Ainsi $\frac{1}{2}\pi z^2 dx$ s'évanouit, et l'intégrale est nulle d'elle-même.

De même, $\pi z p dx dy$ intégré d'abord par rapport à x seul, donne $\pi dy \int z p dx = \frac{1}{2}\pi z^2 dx$, parce que $pdx = dz$ lorsque y est constant. Or l'intégrale $\frac{1}{2}\pi z^2 dx$ prise entre les limites convenables s'évanouit encore. Il résulte de ces deux conséquences que *toutes les pressions que le fluide exerce horizontalement sur chacune des tranches élémentaires parallèles au plan de flottaison, se détruisent mutuellement.*

283. Venons-en maintenant à la composante verticale $\pi z dx dy$, qui est dirigée de bas en haut : il est visible que $z dx dy$ est le volume du prisme $Qqm'm$: donc $\pi z dx dy$ est égal au poids d'un prisme de fluide d'un volume égal à celui de $Qqm'm$. Concevons un cylindre vertical qui auroit pour base la projection $OKLH$ de la partie plongée du corps, il l'embrassera et la touchera suivant la courbe $O'L'$. N'ayons d'abord égard qu'aux pressions éprouvées par la partie inférieure $O'IL'$: elles forment visiblement une série de forces verticales, dirigées de bas en haut ; chacune d'elles est $= \pi z dx dy$, qui est le poids du prisme de fluide dont nous venons de parler. Mais une partie de ces pressions seront diminuées par celles qui sont exercées à la partie supérieure du corps, car elles agissent en sens contraire : si même le corps étoit entièrement plongé, il faudroit les diminuer toutes de $\pi z' dx dy$, z' désignant l'enfoncement dans le fluide des élémens pressés. De sorte que la force qui en résultera sera simplement $\pi (z - z') dx dy$, qui est le poids d'un prisme de fluide égal au filet du corps plongé qui répond au-dessus de l'élément qu'on considère.

Il résulte de là qu'on peut faire abstraction des pres-

sions qui ont lieu à la partie supérieure du corps, pourvu qu'on regarde celles qui sont exercées à la partie inférieure $O'IL$ comme égales à $\varpi(z-z')\,dxdy$. Donc *un corps plongé en tout ou en partie dans un fluide pesant et en équilibre, éprouve des pressions dont la résultante est verticale, dirigée de bas en haut et égale au poids du fluide que le corps déplace : cette résultante passe d'ailleurs par le centre de gravité de fluide déplacé*, car toutes les composantes étant assimilées à des poids, elle doit passer par le centre de gravité de leur système (*).

284. Nous avons jusqu'ici fait abstraction du poids du corps : or ce poids est une force verticale dirigée de haut en bas, et agissant au centre de gravité du corps : cette force est donc opposée à la poussée du fluide. Donc, 1°. les composantes horisontales se détruisent encore ici ; 2°. *le poids d'un corps plongé en tout ou en partie dans un fluide, est diminué du poids d'un volume de fluide égal à celui qu'il déplace.*

Quand il arrive que le poids du corps est égal à celui du fluide déplacé, les deux forces ne s'entredétruisent que lorsqu'elles sont directement opposées (34), ce qui exige que les centres de gravité du corps et du fluide déplacé soient

(*) On peut se rendre raison *à priori* de cette conséquence : en effet supposons qu'une force agissant sur un corps non pesant le retienne en équilibre plongé en tout ou en partie dans un fluide pesant. Si on remplace la portion plongée du corps, par un segment égal de fluide devenu solide, l'équilibre subsistera visiblement sans le secours d'aucune force. Donc le poids de ce solide sera égal et directement opposé à la pression du fluide sur le corps plongé, c'est-à-dire, à la force qui l'y retient en équilibre. Donc, etc.

dans la même verticale. Ainsi *pour qu'un corps pesant puisse flotter en équilibre sur un fluide, il faut deux conditions*, 1°. *que le poids entier du corps soit égal au poids du volume de fluide déplacé*; et 2°. *que la droite qui passe par les centres de gravité du corps et du fluide déplacé soit verticale.*

285. Soient Π et ϖ les pesanteurs spécifiques respectives d'un corps et d'un fluide; V le volume du corps, v celui du fluide qu'il déplace, ϖv sera le poids du fluide déplacé, et représentera la pression totale exercée sur le corps : ΠV sera le poids du corps; et il se présente ici trois cas.

1°. Si l'équilibre subsiste, alors on a

$$\varpi v = \Pi V \ldots\ldots\ldots (t).$$

Cette équation exprime l'une des deux conditions nécessaires pour que l'équilibre ait lieu. On remarque que si le corps est entièrement plongé dans le fluide, comme $v = V$, il faut alors que $\varpi = \Pi$, c'est-à-dire, que le corps doit avoir la même pesanteur spécifique que le fluide : dans ce cas l'équilibre a lieu, quelle que soit la position du corps dans le fluide, car le centre de gravité du corps est le même que celui du fluide déplacé. La réciproque est vraie.

2°. Si on a $\varpi v > \Pi V$; alors le corps doit remonter, et la poussée du fluide surpasse le poids du corps de $\varpi v - \Pi V$. Or dans ce cas v étant la seule quantité qui varie lorsque le corps remonte, on voit qu'il doit arriver un instant où on aura $\varpi v = \Pi V$; de sorte qu'après plusieurs oscillations verticales, si les centres de gravité du corps et du fluide déplacé se trouvent toujours dans la même verticale, l'équilibre doit s'établir. Observons que le cas présent exige

toujours que la pesanteur spécifique du corps soit plus petite que celle du fluide, car on a toujours $\nu < V$.

3°. Enfin si on a $\varpi\nu < \Pi V$ le corps devra descendre, et son poids sera réduit à $\Pi V - \varpi\nu$: mais comme ν croît à mesure que le corps descend, il est clair que l'on parviendra à avoir $\varpi\nu = \Pi V$, si Π est $< \varpi$; et comme ν ne peut surpasser V, on sait que l'état d'équilibre n'est jamais possible lorsque ϖ est $< \Pi$. Le corps descend alors jusqu'à ce qu'il trouve un obstacle qui l'arrête.

Ainsi il n'y a que les corps dont la pesanteur spécifique est moindre que celle de l'eau qui puissent flotter sur ce fluide. Cependant on doit observer que lorsque les corps ne sont pas homogènes, ou lorsqu'ils ont intérieurement une capacité vide, il faut alors remplacer Π par une pesanteur spécifique moyenne. C'est ce qui fait dire qu'il n'y a pas de substance qu'on ne puisse faire surnager : car on peut l'unir à une autre dont la pesanteur spécifique soit beaucoup plus petite que celle de l'eau ; ou lui donner une forme concave qui puisse se prêter à l'état qu'on demande et satisfaire à l'équation (*t*).

286. Dans tout ce qui vient d'être dit nous avons fait abstraction du poids de l'atmosphère : mais les résultats n'en sont pas moins exacts. Car il est facile de traiter en particulier la pression qu'il produit. En faisant de nouveau tous les calculs développés dans les articles précédens, mais remplaçant ϖz par la pression constante P, on verra que les trois composantes dans le sens des axes de la pression normale à l'élément mm', sont $Ppdxdy$, $Pqdxdy$, $Pdxdy$. Or il est aisé de se convaincre par l'intégration prise entre les limites convenables que les pressions s'entredétruisent toutes. Ainsi *lorsqu'un corps pesant est plongé dans un fluide en équilibre, si on applique une*

Fig. 120.

force qui agisse sur le fluide à l'aide d'un piston, l'équilibre ne sera nullement altéré.

287. Nous avons vu (284) qu'il falloit essentiellement deux conditions pour qu'un corps puisse flotter en équilibre sur un fluide : or, par la propriété des centres de gravité (36, et 52, 5°.), la droite qui joint les centres de gravité d'un corps et d'un segment formé par un plan quelconque, doit aussi passer par celui de l'autre segment : dans le cas que nous traitons ici, le plan coupant est la surface même du fluide, qu'on nomme *plan de flottaison ;* on en conclut que pour qu'un corps soit en équilibre sur un fluide spécifiquement moins pesant que lui, il faut que la droite qui passe par les centres de gravité du corps et d'un des segmens formés par le plan de flottaison, soit perpendiculaire à ce plan. Ainsi le problème général de la recherche des positions d'équilibre d'un corps homogène est réduit au suivant. *Couper par un plan, un corps de figure donnée, de manière que la ligne droite qui passe par le centre d'inertie du corps et par celui de l'un des segmens, soit perpendiculaire au plan coupant; et de plus que le volume de l'un des segmens, soit à celui du corps entier dans un rapport donné :* ce rapport est assigné par l'équation (*t*). En mettant donc cette double condition en équation, les positions d'équilibre d'un corps seront données par ses racines qui en indiquent le nombre. Nous ne pouvons nous occuper ici de la résolution de ce problème qui ne dépend que de la géométrie. Consultez la *Mécanique philosophique*, page 244.

288. Il résulte de ce qu'on vient de dire, que les prismes et les cylindres droits, homogènes et à base quelconque, ont deux positions d'équilibre manifestes, en disposant

verticalement la ligne génératrice et en plongeant tour-à-tour chacune des bases dans le fluide. La même chose a lieu aussi pour les solides de révolution et pour les corps symétriques, par rapport à une ligne, en plaçant cette ligne verticalement.

De plus les prismes et cylindres droits, et en général tous les corps susceptibles d'être coupés par un plan en deux segmens symétriques, ont des positions d'équilibre dans lesquels ce plan est vertical. Pour trouver ces positions, il suffit de considérer seulement celles de l'aire résultant de l'intersection du corps par ce plan.

Fig. 133 et 134.

289. Un exemple simple suffira pour faire voir cette dernière proposition, et comment différentes positions d'équilibre d'un corps sont données par une même équation. Supposons que le solide est un prisme triangulaire homogène et droit, dont les arêtes sont horisontales et dont la base est le triangle SEG ; XX' est le plan de flottaison. Il faut considérer deux cas ; 1°. celui (fig. 133) où les bases de ce prisme ont un angle S plongé dans le fluide, et deux angles G, E hors de ce fluide ; 2°. le cas inverse (fig. 134). Nous allons traiter à-la-fois ces deux circonstances, parce que le calcul en est le même.

Pour connoître la ligne MN suivant laquelle le plan XX' coupe le triangle, il faut trouver $SM = x$, et $SN = y$. Les données sont, en supposant que P est au milieu de EG, $SE = a$, $SG = b$, $SP = k$, $PSE = m$, $GSP = n$. Pour satisfaire à l'équation (θ), on aura, en désignant par r le rapport $\frac{\Pi}{\pi}$ de la pesanteur spécifique Π du corps à celle π du fluide,

Dans le premier cas (fig. 133) ... $r.SEG = SMN$;

Dans le second cas (fig. 134) ... $r.SEG = GEMN$.

Or les deux triangles SMN, SEG ont l'angle S commun,

et on a (prop. 24, liv. 3, de la Géométrie de *Legendre*),

$$\frac{SMN}{SEG}=\frac{SM\times SN}{SG\times SE}=\frac{xy}{ab},$$

d'où $$\frac{SEG-SMN}{SEG}=\frac{GNME}{SEG}=\frac{ab-xy}{ab};$$

on a donc $xy = rab$, ou $xy = ab\ (1-r)$ .... (1).

Il s'agit maintenant de satisfaire à la seconde condition (284); c'est-à-dire, que les centres de gravité de SEG et du fluide déplacé (SMN fig. 133, ou $GNME$ fig. 134) soient dans la même verticale. Si on prend $PR = \frac{1}{3} PS$, R sera (58) le centre de gravité du triangle SEG; de même si Q est le milieu de MN, et si $QO = \frac{1}{3} QS$, O sera le centre d'inertie du triangle SMN: la droite RO, ou sa parallèle PQ, doit donc être verticale dans le cas d'équilibre, c'est-à-dire, que $PM = PN$ exprimera cette condition. Abaissons du point P les perpendiculaires PA et PD, sur SE, et SG. On a $PA = k \sin m$, $PD = k \sin n$, $SA = k \cos m$, $SD = k \cos n$. Donc $AM = k \cos m - x$, et $ND = k \cos n - y$: or $PM = PN$, donne $AP^2 + AM^2 = PD^2 + ND^2$. En substituant et réduisant on a

$$x^2 - 2kx \cos m = y^2 - 2ky \cos n.$$

Pour trouver les positions d'équilibre, il faut donc éliminer x et y entre cette équation et l'une des deux valeurs n°. (1); ce qui donne, suivant qu'il s'agit de la fig. 133 ou de la fig. 134,

$$\left.\begin{array}{l} x^4-2kx^3\cos m+2abkrx.\cos n-r^2a^2b^2=0\ldots\ldots \\ x^4-2kx^3\cos m+2(1-r)abkx\cos n-(1-r)^2.a^2b^2=0 \end{array}\right\}\ldots(2).$$

On observe d'ailleurs que comme les équations (1) sont les mêmes en changeant r en $1-r$, il suffit pour obtenir cette dernière équation de changer r en $1-r$ dans la

précédente, ce qui dispense de faire une seconde fois l'élimination. Les équations (2) sont du quatrième degré et ont au moins deux racines réelles, à cause du dernier terme qui est négatif (Alg. de *Lacroix*, n°. 219) : mais ces racines peuvent être toutes les quatre réelles, et alors la disposition des signes indique (Comp. d'alg. de *Lacroix*, page 91), par la règle de *Descartes*, que trois des racines sont positives, et que la quatrième est négative. Cette dernière racine est inutile au cas présent; car la pesanteur n'agissant jamais que de haut en bas, la droite SM ne peut être placée que d'un seul côté par rapport au point S; de sorte qu'on ne peut porter la valeur de x sur le prolongement de MS. Il y aura donc une ou trois positions d'équilibre, qui seront données par les racines positives des équations (2) : les valeurs correspondantes des y seront données par les équations (1). On devra cependant avoir $x < a$, et $y < b$.

290. Appliquons ces raisonnemens au triangle isocèle, et pour ne pas compliquer les calculs, ne considérons que le cas où il n'y a qu'un seul angle du triangle plongé dans le fluide; l'autre cas s'en déduira aisément en changeant dans les résultats r en $1 - r$, d'après ce qu'on a vu. On a donc ici $m = n$, et $a = b$: ce qui donne

$$xy = a^2r, \text{ et } x^4 - 2kx^3\cos m + 2a^2rkx\cos m - r^2a^4 = 0.$$

Les facteurs du second degré de cette dernière étant $x^2 - a^2r = 0$, et $x^2 - 2kx\cos m + a^2r = 0$, on en conclut, en ne prenant que les racines positives,

$$x = a\sqrt{r}, \text{ et } x = k\cos m \pm \sqrt{(k^2\cos^2 m - a^2r)};$$

d'où $y = x$, et $y = k\cos m \mp \sqrt{(k^2\cos^2 m - a^2r)}$.

La première racine indique qu'il y a une position d'équili-

bre en supposant EG horisontal. Cela s'applique aussi au cas de la fig. 134. Les autres positions sont données par les deux autres racines ; mais elles doivent satisfaire à des conditions remarquables : car x et y doivent être $< a$; ou $a - k\cos m > \pm\sqrt{(k^2\cos^2 m - a^2 r)}$; en quarrant et réduisant on trouve $r > \frac{2k\cos m - a}{a}$; et comme d'ailleurs chaque radical doit être réel, il faut aussi qu'on ait $r < \frac{k^2\cos^2 m}{a^2}$. On aura de même les limites pour le second cas, en changeant r en $1 - r$; elles sont . . . . . $r < \frac{2a - 2k\cos m}{a}$, et $r > \frac{a^2 - k^2\cos^2 m}{a^2}$. Ces conditions doivent être satisfaites pour qu'il y ait trois positions d'équilibre : sans cela, il n'y auroit que celle qui est donnée par l'équation $x = y = a\sqrt{r}$.

Lorsque le triangle est équilatéral comme chaque angle est le tiers de deux droits, m est le tiers d'un angle droit, et $\cos m = \sqrt{\frac{3}{4}}$: ainsi $k = SE \times \cos m = a.\sqrt{\frac{3}{4}}$; donc $k\cos m = \frac{3}{4}a$: donc les limites ci-dessus deviennent

premier cas $r > \frac{1}{8}$ et $r < \frac{9}{16}$; second cas $r < \frac{1}{8}$ et $r > \frac{7}{16}$.

291. Lorsqu'un corps flottant est en équilibre, nous savons que si on lui ajoute un poids P, il doit enfoncer dans le fluide : supposons que les centres de gravité du corps et du fluide déplacé restent dans une même verticale, proposons-nous de déterminer la hauteur z de l'enfoncement. Soit K l'aire de la section du corps par le plan de flottaison dans la seconde position d'équilibre, c'est-à-dire, lorsque l'enfoncement est opéré. Il est clair que K est une fonction de z donnée par la forme du corps et sa disposition sur le fluide dans le premier état d'équilibre. Kdz est la tranche élémentaire du corps ; de sorte que

$\int K dz$ est le volume de la partie du corps qui s'est enfoncée, en prenant l'intégrale depuis $z = 0$: or le volume de fluide déplacé par cet enfoncement est aussi $\int K dz$, dont le poids est $\varpi \int K dz$, ϖ étant la pesanteur spécifique du fluide. Il est manifeste que ce poids doit être égal à celui P qu'on a ajouté : ainsi on a

$$P = \varpi \int K dz \ldots\ldots (1).$$

Pour faire usage de cette formule, on y substituera pour K sa valeur en fonction de z, et l'intégrale étant prise depuis $z = 0$, on en déduira z, ou la hauteur de l'enfoncement.

Cette théorie s'applique principalement aux corps symétriques par rapport à un axe vertical (288), tels que les corps de révolution ; parce que les centres de gravité du corps et du fluide déplacé sont alors sur cet axe. L'équation de la courbe génératrice du corps de révolution est $y = fz$; en supposant que l'origine est au point où l'axe est coupé par le plan de flottaison primitif : K est l'aire d'un cercle dont l'ordonnée y est le rayon ; ainsi $K = cy^2$, (c étant le rapport du diamètre à la circonférence) l'équation (1) devient donc

$$P = \varpi c \int y^2 dz.$$

Par exemple, soit un paraboloïde de révolution, d'abord placé dans une position d'équilibre, l'axe étant vertical ; on a pour l'équation de la parabole $y^2 = m(a + z)$, m étant le paramètre et a désignant la distance du sommet au plan de flottaison. Si on ajoute un poids P, on a $P = \frac{1}{2} \varpi cm (a + z)^2 + C$; et comme $P = 0$, donne $z = 0$, on a $C = -\frac{1}{2} \varpi cma^2$; donc enfin $z = -a \pm \sqrt{\left\{\frac{2P}{\varpi cm} + a^2\right\}}$. Le signe inférieur se rapporte au cas où on auroit au contraire ôté le poids P.

292. La formule (1) peut encore s'appliquer aux prismes et cylindres droits à base quelconque, dans les cas où la génératrice est verticale ou horisontale. En effet, si elle est horisontale, il suffit d'avoir égard à la base qui est une courbe plane dont l'équation est donnée ; alors K est simplement la longueur de la ligne d'intersection de cette courbe par le plan de flottaison dans le second état d'équilibre. Si au contraire la génératrice est verticale, K est l'aire constante de la base, et on a simplement $P = \varpi K z$, d'où $z = \frac{P}{\varpi K}$.

Ainsi pour le cylindre droit à base parabolique, si la génératrice est horisontale, on a encore ici $y^2 = m(a + z)$; d'où on voit que $K = 2\sqrt{m}.\sqrt{(a+z)}$, ce qui donne pour la formule (1), $P = \frac{4}{3}\varpi\sqrt{m}\left\{(a+z)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}\right\}$, d'où il est aisé de déduire la valeur de z. Si au contraire ce cylindre a sa génératrice verticale, comme on sait que la base est un segment parabolique dont l'aire est $K = \frac{2}{3}hk$, h et k étant les deux plus grandes dimensions de ce segment, on a $z = \frac{3P}{2\varpi hk}$.

On observe que tout ce qui vient d'être dit s'applique également au cas où on ôteroit au contraire un poids P au corps flottant.

III. *De l'Aréomètre et de la Balance hydrostatique.*

293. Nous avons appelé (276) *pesanteur spécifique* d'une substance, le poids absolu de l'unité de volume, et d'après cette définition nous avons établi toutes les conséquences précédentes. Comme la théorie des corps flottans exige la connoissance des pesanteurs spécifiques

des divers corps, tant solides que fluides, nous allons nous occuper des moyens propres à les calculer. Avant tout nous observerons que l'usage des formules où entrent les pesanteurs spécifiques, n'exige pas la connoissance de leurs grandeurs absolues, mais seulement de leurs rapports entr'elles : si de plus on remarque que nous n'avons d'autre moyen d'assigner le poids d'un corps que de trouver son rapport à un autre poids pris pour unité (222), il est aisé de conclure qu'il ne s'agit ici que d'assigner les rapports qui existent entre les pesanteurs spécifiques des diverses substances.

Il faut donc concevoir qu'on a pris la pesanteur spécifique d'une substance pour unité, et qu'on veut seulement trouver les rapports qui existent entre cette pesanteur spécifique, et celles des autres substances. C'est d'après ces considérations, et à l'aide des principes que nous allons développer, qu'on a formé la table qui est à la fin de cet ouvrage, et dans laquelle la pesanteur spécifique de l'eau distillée, a été prise pour terme de comparaison, et représentée par 10000. De sorte que les nombres 72914 et 10000 qu'on lit dans cette table à la suite des mots *Etain* et *Eau*, désignent que les poids de l'unité de volume, ou, si on veut, les poids de deux volumes égaux d'étain et d'eau, sont entr'eux comme 72914 est à 10000.

Si on vouloit se servir de cette table pour déterminer le poids x d'un volume V d'une des substances qui y sont comprises, il est clair qu'il faudroit chercher le poids a d'un pareil volume d'eau, et faire cette proportion, (dans laquelle t désigne le nombre mis dans la table à côté de cette substance) $\frac{10000}{t} = \frac{a}{x}$; donc $x = \frac{at}{10000}$.

Ainsi *pour trouver le poids d'un volume déterminé d'une substance, il faut séparer vers la droite par une vir-*

gule, quatre chiffres du nombre mis dans la table à côté de cette substance, et multiplier par le poids d'un volume égal d'eau. Pour trouver ce dernier poids on doit savoir que le pied cube d'eau distillée pèse 70 livres ; que le pouce cube pèse 5 gros 13 ½ grains, ou 5,185185... gros, ou enfin 0,04051 livres : ou, si on veut, que le centimètre cube pèse 1 gramme, et que le décimètre cube pèse 1 kilogramme. Ainsi en multipliant 7,2914 par 5,185 gros, il sera facile de voir que le pouce cube d'étain pèse 4 onces, 5 gros, 58 grains.

294. L'*Aréomètre* ou *Pèse-liqueur* est un instrument destiné à faire connoître les rapports des pesanteurs spécifiques des fluides : sa forme est à-peu-près arbitraire ; voici la construction de celui de *Fahrenheit*. Soit D un globe de verre lesté inférieurement, afin qu'il garde la position verticale (301), et surmonté d'un tube CE, terminé supérieurement par une cupule B. Si on plonge cet instrument dans un fluide, il s'y enfoncera jusqu'en un point C, et le poids entier de l'aréomètre sera égal au poids du volume v de fluide qu'il déplace. Dans un autre fluide, l'instrument s'enfonceroit jusqu'en E, et déplaceroit un volume v' : désignons par ϖ et ϖ' les pesanteurs spécifiques des fluides, le poids de l'instrument sera donc égal d'une part à ϖv, et de l'autre à $\varpi' v'$; ainsi on aura $\varpi v = \varpi' v'$; c'est-à-dire, que *les pesanteurs spécifiques de deux fluides sont en raison inverse des volumes déplacés.* Si donc on pouvoit parvenir à connoître ces volumes, on auroit le rapport des pesanteurs spécifiques. Fig. 131.

Dans les usages ordinaires de la vie, comme on n'a besoin que de valeurs grossièrement approchées, et d'ailleurs comme on n'éprouve qu'un petit nombre de fluides, on emploie un instrument semblable à celui qui est représenté fig. 131, sur lequel on marque des divisions ; de

sorte qu'au premier aspect on juge des pesanteurs spécifiques d'après les nombres de degrés de l'instrument. Mais ce procédé est trop peu rigoureux pour convenir au but que nous nous proposons. Pour éviter d'évaluer les volumes de fluide déplacé, on se sert de cet instrument en ajoutant des poids dans la cupule B, ou en ôtant, de manière à rendre les enfoncemens égaux dans les divers fluides. Par là les volumes déplacés sont toujours les mêmes : soient donc p et $p \pm q$ les poids de l'instrument ; et v le volume déplacé dans les deux épreuves faites sur des fluides dont ϖ et ϖ' sont les pesanteurs spécifiques ; on aura $p = \varpi v$ et $p \pm q = \varpi' v$, d'où

$$\frac{\varpi'}{\varpi} = \frac{p \pm q}{p} \ldots\ldots\ldots (x).$$

On peut remarquer que l'aréomètre peut aussi servir à déterminer le poids d'un corps dans l'air : car plaçons ce corps dans la cuvette supérieure et observons sur l'instrument le degré où il s'enfonce dans le fluide ; puis ôtons le corps de la cuvette et substituons-lui des poids jusqu'à ce que l'aréomètre s'enfonce de nouveau dans le fluide au même degré ; il est clair que ces poids équivalent à celui du corps, puisque le poids de l'instrument doit dans les deux épreuves être le même.

295. *Nicholson* (*) a imaginé d'employer à la détermination des pesanteurs spécifiques des solides un instrument analogue à l'aréomètre de *Fahrenheit*, et qui mérite d'être connu. Il consiste en un tube MN de fer blanc, surmonté d'une tige Bb, faite d'un fil de laiton, et qui porte à son extrémité une petite cuvette A. Cette tige est marquée vers

Fig. 132 bis.

(*) Cet article est extrait du *Traité de physique* de Haüy.

son milieu d'un trait *b* fait avec la lime. La partie inférieure tient suspendu un cône renversé *E*, concave à l'endroit de sa base, et lesté en dedans avec du plomb. Le poids de l'instrument doit être tel, que quand on plonge celui-ci dans l'eau pour l'abandonner ensuite à lui-même, une partie du tube surnage. La cuvette qui termine la tige, et qui a la forme d'une calotte sphérique, y est assujettie au moyen d'un petit tube de fer blanc, dans lequel cette tige entre avec frottement. On a ordinairement une seconde cuvette plus large, que l'on place au-dessus de la première, dans la concavité de laquelle elle s'engage par sa convexité. On peut ainsi enlever à volonté cette seconde cuvette, soit pour retirer plus facilement les poids dont elle est chargée, comme nous le dirons dans un instant, soit pour faire quelque changement dans leur assortissement.

L'usage de cet instrument est facile à concevoir. On commence par placer dans la cuvette supérieure les poids nécessaires pour que le trait *b*, marqué sur la tige, descende à fleur d'eau; c'est ce que nous appelons *affleurer* l'aréomètre, et la quantité de poids dont nous venons de parler se nomme la *première charge* de l'aréomètre (*). Ayant repris cette charge, on met dans la même cuvette le corps destiné pour l'expérience, et que nous supposons toujours plus dense que l'eau; puis l'on place à côté les poids nécessaires pour produire l'affleurement. On retranche cette seconde charge de la première, et la différence donne le poids du corps dans l'air. On retire l'aréomètre, pour placer le corps dans le bassin inférieur *E*; puis ayant replongé l'instrument, on ajoute de nouveaux poids dans

(*) Il est presqu'inutile d'avertir que l'usage de l'instrument est limité aux corps dont le poids dans l'air n'excède pas cette première charge.

la cuvette A, jusqu'à ce que l'affleurement ait encore lieu. Ces nouveaux poids forment avec ceux qui étoient déjà dans la cuvette la troisième charge. On soustrait de cette charge la seconde, et la différence donne la perte que le corps a faite de son poids dans l'eau, ou le poids du volume déplacé ; après quoi on divise par ce poids celui du corps pesé dans l'air.

296. Désignons toujours par π et Π les pesanteurs spécifiques d'un fluide et d'un corps : s'il arrive qu'après avoir entièrement plongé ce corps dans le fluide l'équilibre n'a pas lieu, V étant le volume du corps, et par conséquent celui du fluide déplacé $\Pi V - \pi V$ sera l'excès du poids du corps sur celui d'un pareil volume de fluide. Si donc on cherche cet excès en suspendant le corps ainsi plongé à l'un des fléaux d'une balance, qu'on appelle pour cela *Balance hydrostatique*, f étant le poids qui établit l'équilibre, on a $f = V(\Pi - \pi)$, d'où $\pi = \frac{\Pi V - f}{V}$. Soit P le poids du corps ; comme $P = \Pi V$, on a donc

$$\frac{\pi}{\Pi} = \frac{P - f}{P} \ldots\ldots (\lambda).$$

Ainsi *le rapport de la pesanteur spécifique du fluide à celle du corps est le quotient du poids perdu par ce corps dans le fluide, divisé par le poids de ce corps dans le vide.* On peut même regarder P comme le poids du corps dans l'air, quoique ce fluide diminue un peu le poids du corps : mais il n'en peut résulter que des erreurs très-légères, puisque la pesanteur spécifique de l'air est très-petite par rapport à celle de l'eau, du mercure..., fluides qu'on emploie ordinairement dans ces sortes d'expériences.

S'il s'agissoit d'un corps dont la pesanteur spécifique fût

moindre que celle du fluide, il surnageroit; alors il est clair que pour le contraindre à s'immerger tout-à-fait, il faudroit au contraire ajouter un poids f au fléau qui le soutient; ce qui revient à changer ci-dessus le signe de f.

297. La balance hydrostatique sert aussi à trouver les rapports des pesanteurs spécifiques des fluides; en effet soient f et f' les poids du même corps dans deux fluides: on a vu que $f = V(\Pi - \pi)$, d'où $\pi V = \Pi V - f$. On a de même $\pi' V = \Pi V - f'$; d'où on tire

$$\frac{\pi}{\pi'} = \frac{\Pi V - f}{\Pi V - f'} = \frac{P - f}{P - f'} \ldots\ldots (\mu).$$

Ainsi le rapport des pesanteurs spécifiques des fluides est le même que celui des pertes de poids que fait le corps plongé. Consultez sur cette matière la *Table des pesanteurs spécifiques* par *Brisson*.

298. Il est aisé maintenant de comprendre comment ARCHIMÈDE put résoudre le problème de Hiéron, roi de Syracuse. Il s'agissoit de s'assurer, sans endommager une couronne, si elle étoit composée d'or pur; et dans le cas où on y auroit mêlé de l'argent, de connoître le rapport entre les parties constituantes de ces deux métaux. Ce problème revient à trouver le titre d'un lingot composé d'or et d'argent.

Soit Π et Π' les pesanteurs spécifiques de ces deux métaux; V et V' les volumes de chacun d'eux contenus dans le mélange; π la pesanteur spécifique de l'eau; enfin f et f' les poids du mélange dans le vide et dans l'eau. Les poids respectifs des parties d'or et d'argent contenues dans le mélange sont ΠV et $\Pi' V'$; ainsi $\Pi V + \Pi' V' = f$; de plus on a $f = \pi(V + V') + f'$: car f et f' sont les poids du mélange dans le vide et dans l'eau, et $\pi(V + V')$ est celui d'un volume d'eau égal à celui du corps, parce

que $V+V'$ est le volume du mélange. On a donc les deux équations

$$f=\Pi V+\Pi' V',\quad f=\varpi(V+V')+f'.$$

Eliminant entre ces deux résultats, on a pour les poids ΠV et $\Pi' V'$ des parties d'or et d'argent contenues dans le mélange

$$\Pi V=\frac{f'\Pi'\Pi-f\Pi(\Pi'-\varpi)}{\varpi(\Pi-\Pi')},\quad \Pi' V'=\frac{f\Pi'(\Pi-\varpi)-f'\Pi'\Pi}{\varpi(\Pi-\Pi')}.$$

Comme le volume $V+V'$ du corps est $=\frac{f-f'}{\varpi}$, il est aisé d'ailleurs de s'assurer si le mélange contient de l'alliage, ou s'il n'est formé que d'or pur. Cette théorie est supposée dégagée de la pénétration apparente que les corps mélangés peuvent éprouver, en vertu de leurs attractions chimiques.

IV. *Stabilité et oscillations des corps flottans.*

299. Lorsqu'un corps flottant est en équilibre, s'il est dérangé de cet état par une cause quelconque, telle qu'une impulsion, il est important de connoître si cette circonstance permettra au corps de revenir à sa première position, ou le contraindra au contraire à s'en écarter davantage : c'est ce que nous nous proposons d'examiner ici. Seulement afin de simplifier nos considérations nous ferons préalablement trois hypothèses.

Fig. 135. 1°. Nous prendrons le corps flottant d'une forme telle qu'il soit symétrique par rapport à un plan vertical, passant par le centre de gravité G du corps : par là il ne s'agira plus que de résoudre la question proposée pour l'aire plane AFB.

2°. Nous supposerons que le dérangement est très-petit : ainsi AB est la ligne de flottaison dans l'état d'équi-

libre, G le centre de gravité du corps, O celui de l'aire AFB ou du fluide déplacé. (Le centre O peut être placé plus bas que le premier ; cela ne change rien aux considérations : la figure suppose que le corps flottant n'est point homogène, et que sa partie inférieure est chargée d'une substance spécifiquement plus pesante que le fluide.) On suppose qu'après que le dérangement a été opéré, ab est la ligne de flottaison, et que l'angle $aCA = \iota$ est très-petit : ainsi $AC = aC$ et $BC = bC$. Dans cette figure la ligne GO qui étoit verticale est devenue inclinée ; O n'est plus le centre de gravité du fluide déplacé aFb : enfin l'angle GOV formé par GO avec la verticale est $= ACa = \iota$. Fig. 136.

3°. Nous ferons abstraction du mouvement vertical du corps, et nous regarderons aFb comme égale à AFB, de sorte que la partie ACa qui est sortie du fluide soit égale à celle BCb qui s'y est plongée. S'il n'en étoit pas ainsi, le poids du corps ne seroit plus égal à la poussée du fluide, et ces deux forces pouvant être considérées comme appliquées en G, (255), le corps auroit un mouvement vertical : mais en outre il tourneroit autour du point G comme s'il étoit fixe ; et comme ce dernier mouvement a lieu indépendamment du premier, et qu'il est le seul qui nous intéresse, notre hypothèse simplifie les considérations et ne change rien à ce mouvement. Comme $ACa = BCb$; que de plus ces aires forment deux triangles isocèles, on en conclut que le point C est au milieu des droites AB et ab, ainsi $AC = aC = bC = BC$.

La poussée du fluide sur aFb est égale au poids d'une lame de fluide d'un égal volume ; cette force agit au centre de gravité de aFb ; or comme la position de ce centre nous fera trouver le sens du mouvement du corps autour du point G, il faut en déterminer la position. Pour cela observons que $aFb + aCA$ est la même chose

que $AFB + CBb$: or il est démontré (52, 5°.) qu'en considérant les aires aFb, aCA comme concentrées en leurs centres de gravité respectifs, ainsi que les aires AFB et CBb, et prenant les momens par rapport à une droite quelconque, ces momens seront de part et d'autre égaux. Prenons donc les momens par rapport à la verticale Gi, et faisons l'aire $AFB = S = aFb$, et la distance $GO = a$.

1°. On a $S \times GV = Sa \sin\theta = Sa\theta$, pour le moment de l'aire AFB supposée réunie en O.

2°. $CBb \times qi$ sera celui de l'aire CBb ; en supposant que q est le pied de la verticale passant par le centre de gravité de BCb.

3°. $aCA \times ip$ sera de même celui de l'aire aCA.

4°. Enfin soit gn la verticale passant par le centre de gravité de aFb, $aFb \times Gn = S \times Gn$ sera le moment de l'aire aFb.

Cela posé, observons que le moment de aCA doit être pris en signe contraire de celui de aFb, parce qu'ils tendent à faire tourner en sens contraires (27) autour du point G. On a donc $S \times Gn - ACa \times ip = Sa\theta + CBb \times qi$, d'où $S \times Gn = Sa\theta + CBb \times pq$. Faisant $AB = b = 2.BC$, on a $BCb = Cb \times \frac{1}{2}Be = \frac{1}{4}b \times Be$; or $Be = CB \times \sin\theta = \frac{1}{2}b\theta$; donc $BCb = \frac{1}{8}b^2\theta$. De plus comme les points p et q sont distans de C des deux tiers de aC, (58), on a $pq = \frac{2}{3}(ab) = \frac{2}{3}b$. Donc

$$Gn = \left(a + \frac{b^3}{12S}\right)\theta.$$

Fig. 136. Nous devons remarquer aussi que le moment de l'aire AFB n'est ici positif que parce que le centre de gravité du fluide déplacé s'est trouvé plus élevé que celui du corps ; mais s'il n'en eût pas été ainsi, et si le point O se fut trouvé placé sous le point G, la perpendiculaire GV seroit

tombée du côté opposé ; alors le moment de *AFB* auroit tendu à faire tourner en sens contraire, et on auroit eu $Gn = \left(-a + \frac{b^3}{12S}\right)\theta$. Si on veut cumuler les deux cas dans la même formule, on écrira donc

$$Gn = \left(\frac{b^3}{12S} \pm a\right)\theta \ldots\ldots\ldots (1)$$

en prenant le signe supérieur dans le cas où le centre de gravité du corps est plus bas que celui du fluide déplacé ; et le signe inférieur dans le cas contraire.

300. Il est évident que si la distance Gn est nulle, les centres de gravité du corps et du fluide déplacé se trouveront encore dans la même verticale Gi ; ainsi l'équilibre subsistera dans la nouvelle position du corps. Cela arrive lorsque a étant négatif, on a $a = \frac{b^3}{12S}$; mais si ces conditions n'ont pas lieu, comme la poussée du fluide agit de bas en haut, il est clair que si Gn est positif, le corps tendra à reprendre sa première position : on dit alors que l'équilibre est *stable*. Ce cas a lieu lorsque a est positif, ou lorsque a étant négatif, il arrive que a est plus petit que $\frac{b^3}{12S}$. Enfin si a est négatif et $> \frac{b^3}{12S}$, Gn est négatif, ce qui signifie que le centre de gravité de aFb est disposé de l'autre côté de la verticale Gi : il est alors évident que la poussée du fluide tend à écarter davantage le corps de sa position primitive, et que l'équilibre n'est point stable. Fig. 126.

La verticale ng rencontre GO en un point g auquel *Bouguer* a donné le nom de *Métacentre* dans son *Traité du navire ;* ce point est, comme on voit, *celui où se rencontrent les verticales qui passent par les centres de gra-*

vité du fluide déplacé dans les deux positions du corps. Il suit de cette définition que *le corps flottant est en équilibre stable lorsque le métacentre est plus élevé que le centre de gravité du corps ; qu'il manque au contraire de stabilité lorsque le métacentre est plus bas que le centre de gravité du corps ; et qu'enfin lorsque ces deux points coïncident, le corps persiste dans l'état où on le met.* Il est en effet évident que le point g est plus élevé ou moins élevé que G, ou même coïncide avec G, suivant que la valeur de Gn est positive, négative ou nulle. Si on divise par θ la valeur (*) on trouve

$$Gg = \frac{b^3}{12S} \pm a. \ldots\ldots\ldots (\xi).$$

Fig. 136. 301. Représentons pour abréger cette valeur par A ; nous aurons $Gg = A$, $Gn = A\theta$; et enfin, P désignant le poids du corps ou la poussée du fluide, $PA\theta$ sera le moment de cette force par rapport à l'axe passant par le centre de gravité G. Nous avons vu (k^{II}, 243) que lorsqu'un corps, retenu par un axe fixe, est soumis à l'action d'une force, l'effet de cette force pour faire tourner le corps croît dans le même rapport avec l'intensité de la puissance et avec sa distance à l'axe fixe. La puissance est ici la poussée du fluide ; son moment par rapport au centre de gravité est $PA\theta$: il suit de là que lorsqu'un corps flotte sur un fluide, son poids P étant constant, la vîtesse qu'engendre la poussée du fluide est d'autant plus grande que l'inclinaison θ est elle-même plus grande, ainsi que A. Donc la *stabilité* d'un corps flottant en équilibre est un maximum lorsque son centre de gravité est plus bas que celui du fluide déplacé et que la distance entre ces centres est la plus grande possible. Alors si le corps est tiré de l'état de l'équilibre, la force qui tend à le rétablir

est la plus grande possible. C'est par cette raison qu'on *leste* les corps flottans dont on veut empêcher le renversement : on dispose à leur partie inférieure une substance d'une pesanteur spécifique plus grande que celle du fluide, afin que le centre de gravité du corps soit plus bas que celui du fluide déplacé.

302. On aura une juste idée de l'équilibre stable et de l'équilibre non stable, en considérant une ellipse placée verticalement sur un plan horisontal. Si l'ellipse est en équilibre sur son petit axe, on voit qu'en l'écartant un peu de cette situation, elle tend à y revenir, en faisant des oscillations que le frottement et la résistance de l'air auront bientôt anéanties. Mais si l'ellipse est en équilibre sur son grand axe, une fois écartée de cette situation, elle tend à s'en éloigner davantage, et finit par se renverser sur son petit axe.

L'exemple que nous venons de donner offre une circonstance remarquable, mais qui pourtant ne lui est pas particulière; les quatre positions d'équilibre de l'ellipse sur les extrémités de ses deux axes, sont alternativement stables et non stables : il est aisé de se convaincre que la même chose a lieu dans tous les cas. En effet, soient deux positions d'équilibre stable d'un corps, et telles qu'il n'en existe entr'elles aucune de même nature : si le corps, supposé placé dans l'une de ces positions, en est écarté pour l'approcher de l'autre ; suivant que cet écartement sera plus ou moins grand, le corps tendra à revenir à son premier état, ou à atteindre la seconde position. Il suit de là qu'il faut nécessairement qu'entre ces deux positions il y en ait une où le corps ne tende pas plus vers l'une que vers l'autre : cet état intermédiaire est un équilibre non stable; car quelque peu qu'on en écarte le corps, vers l'une des deux positions stables, il devra y parvenir.

Lorsqu'on considère deux états voisins d'équilibre non stable, si on écarte le corps de l'un d'eux pour l'amener près de l'autre, comme il ne peut revenir à sa première position, et qu'il doit d'ailleurs s'écarter de la seconde, il devra s'éloigner de ces deux états; ce qui exige qu'il en adopte un qui soit intermédiaire; état qui est visiblement stable. Il faut donc conclure de là qu'entre deux positions d'équilibre stable, il doit exister une position d'équilibre non stable, et réciproquement. Donc *si un corps, en tournant autour d'un axe fixe, passe successivement par plusieurs positions d'équilibre, elles seront tour-à-tour stables et non stables.* On voit donc que le nombre total de ces positions est pair, à moins que deux positions consécutives ne se confondent; dans ce cas la position résultant de leur réunion, donnera l'état déja examiné dans lequel la valeur $(,)$ est nulle.

303. Lorsqu'on écarte très-peu un corps d'une position d'équilibre stable, puisque le moment $PA\phi$ de la poussée du fluide est proportionnelle à l'arc ϕ que le corps devra décrire pour se rétablir dans l'état primitif, cette restitution devra s'opérer suivant les mêmes lois que pour le pendule. Le corps fera donc des oscillations autour de la position d'équilibre stable, et même il oscilleroit sans cesse autour du centre de gravité, si la résistance du fluide n'éteignoit peu-à-peu sa vîtesse, et ne le rendoit enfin au repos stable dont on l'a tiré. Le calcul fournit des moyens de s'assurer directement de tout ceci, et en outre sert à déterminer toutes les circonstances du mouvement oscillatoire, ainsi que nous allons l'exposer.

Fig. 136. Supposons que le corps ait été très-peu écarté de sa position d'équilibre, puis abandonné ensuite à l'instant où on compte $t = 0$. Au bout du tems t, la droite GO qui passe par les centres de gravité du corps et du fluide

déplacé dans l'état d'équilibre, fera avec la verticale un angle GOV mesuré par l'arc θ. Soit f la valeur de θ lorsque $t = 0$, c'est-à-dire, la valeur angulaire qui détermine la position du corps à cet instant : enfin soit α l'arc décrit par le point placé sur GO à l'unité de distance du point G, et u la vîtesse de ce point, ou la vîtesse angulaire; on a $\theta = f - \alpha$. Au bout du tems t, la poussée du fluide tend à accroître la vîtesse u; et en appliquant ici la formule (m^{II}, 246), on voit que pour obtenir la force accélératrice angulaire $\frac{du}{dt}$, il faut diviser le moment $PA\theta$ de la poussée du fluide, par rapport au centre de gravité G, par le moment d'inertie : or M étant la masse du corps, on a $P = gM$; et le moment d'inertie est Mk^2; ainsi on a $\frac{du}{dt} = \frac{Ag\theta}{k^2} = \frac{Ag}{k^2}(f - \alpha)$: or $u = \frac{d\alpha}{dt}$; multipliant ces deux équations, et intégrant, on a

Fig. 126.

$$u = \sqrt{\left\{\frac{Ag}{k^2}(2f\alpha - \alpha^2)\right\}}.$$

Si l'équilibre est stable, on a $f > \alpha$ et A positif; on voit donc que u est réel et croît en même tems que A : si l'équilibre n'est point stable, la même chose a lieu, car A est négatif, et on a $\alpha > f$. Cela confirme donc tout ce qui a été dit (301). Comme $u = \frac{d\alpha}{dt}$, on en déduit $dt = \frac{k}{\sqrt{(Ag)}} \cdot \frac{d\alpha}{\sqrt{(2f\alpha - \alpha^2)}}$. En comparant cette formule avec celle qu'on a obtenue (195), il est aisé d'en conclure l'existence du mouvement oscillatoire, quand A est positif, et de voir que ces oscillations sont isochrones. De plus

1°. En intégrant entre les limites $\alpha = 0$, et $\alpha = 2f$, on a pour le tems T de l'oscillation entière, $T = \frac{k\pi}{\sqrt{(Ag)}}$.

2°. En comparant cette valeur avec celle (5'), on obtient pour la longueur r du pendule simple *synchrone* (249, 3°.), $r = \frac{k^2}{A}$.

Fig. 136 bis. 304. Appliquons ces principes au cas où le corps est un prisme dont le profil transversal est DCE, tel que sa partie plongée soit un triangle ABC isocèle, et dans lequel $AB = b = 2m = 2AF$, et $CF = h$: le surplus $ADEB$ du profil peut avoir une forme quelconque. Soit G le centre de gravité du corps; faisons $FG = n$: on a $FO = \frac{1}{3}h$, O étant celui de ACB, (58). On aura donc $OG = a = n - \frac{1}{3}h$; de plus l'aire ACB est $S = mh$. Ainsi la distance A du métacentre au point G est $A = \frac{2m^3 \pm h(3n - h)}{3h}$, et il est aisé d'en conclure les conditions nécessaires pour que le corps soit dans un équilibre stable, non stable ou permanent. On obtient pour la longueur du pendule synchrone $r = \frac{3hk^2}{2m^3 \pm h(3n - h)}$: on auroit aussi aisément le tems de l'oscillation.

Si la partie plongée du corps étoit un rectangle $ABIH$, en faisant de même $AB = b = 2m$, $BI = h$, et $GF = n$; on trouve $S = 2mh$, $OF = \frac{1}{2}h$, $GO = a = n - \frac{1}{2}h$: donc $A = \frac{m^2}{3h} \pm (n - \frac{1}{2}h)$; et les conditions de la stabilité s'en déduisent aisément : on obtient aussi la longueur du pendule synchrone, et le tems de l'oscillation.

CHAPITRE III.

DES FLUIDES PESANS DE DENSITÉ VARIABLE.

I. *Des fluides hétérogènes pesans et incompressibles.*

305. SI dans un même vase on mêle ensemble des fluides de pesanteurs spécifiques différentes, les molécules devront se séparer, et celles d'une même espèce se réuniront entr'elles : les positions respectives des fluides devront être telles, que les couches qui les sépareront soient horisontales, et que les fluides spécifiquement moins pesans, soient disposés dans la partie supérieure du vase. Tout cela résulte évidemment des principes exposés précédemment.

Soit *ABCD* un syphon de forme arbitraire renfermant deux fluides en équilibre, contenus l'un en *EBCG*, l'autre en *OGHN*; ces substances sont en contact en *OG*. Soient ϖ et ϖ' leurs pesanteurs spécifiques respectives, h et h' les hauteurs des fluides au-dessus de *OG*, c'est-à-dire, $EF = h$, $KI = h'$. Cela posé, il est visible que la partie *FBCG* est naturellement en équilibre; il ne s'agit donc, pour que l'équilibre existe, que de faire ensorte que les pressions exercées sur *OG*, par les fluides *EF* et *HG*, soient égales. La première est $\varpi h \times$ *surface* OG; la seconde est $\varpi' h' \times$ *surface* OG : donc $\varpi h = \varpi' h'$, c'est-à-dire, que *deux fluides en équilibre dans un syphon, doivent avoir leurs hauteurs au-dessus de la surface de* Fig. 137.

contact, en raison inverse de leurs pesanteurs spécifiques.

Fig. 138. 306. *Si un même vase renferme différens fluides, la pression exercée sur le fond horisontal, est le produit de la surface de ce fond, par la somme des produits des pesanteurs spécifiques des fluides par leurs hauteurs.* En effet soient $AMNB$, $ABDC$, ... des couches de différens fluides dont les pesanteurs spécifiques soient ϖ', ϖ'', ... et dont les hauteurs soient h', h'', etc.; soit a la surface MN du fond du vase : la pression exercée sur ce fond, par l'effet de la pesanteur du fluide qui occupe la partie inférieure du vase, sera $\varpi' a h'$, (277). De même la tranche $ABDC$ exerce sur la surface AB une pression $\varpi'' h'' \times AB$. Or cette pression se distribue sur tous les points de MN, et celle qui en résulte est, d'après l'équation (α), $\varpi'' h'' a$, et ainsi des autres. Donc la pression effective est .... $a(\varpi' h' + \varpi'' h'' +$ etc.).

307. On pourra toujours, par le théorême du n°. 277, substituer à un fluide renfermé dans un vase, un autre fluide, aussi de densité constante, mais dont la pesanteur spécifique soit donnée, sans que la pression sur le fond du vase soit différente : il ne faudra que donner une hauteur convenable à ce fluide. Si donc un vase contient plusieurs fluides en équilibre, et de densités différentes, on pourra leur substituer un fluide homogène qui produiroit la même pression sur le fond de ce vase. On pourroit démontrer le théorême précédent, à l'aide de ce principe, qui peut servir dans plusieurs circonstances pour évaluer la pression.

II. *Des fluides élastiques.*

308. Les fluides classés sous la dénomination d'*air*,

formes, jouissent de la propriété remarquable d'occuper sensiblement un espace d'autant plus petit, que les puissances qui les compriment sont plus grandes, et de se rétablir dans leurs volumes primitifs, lorsque les forces qui ont fait changer ces volumes cessent leur action. Cette propriété leur a fait donner le nom de *Fluides élastiques*; soit P une pression exercée sur un volume V de fluide, dont la densité soit D; p une autre pression, v le volume que prendra la masse du fluide en vertu de cette pression, et d sa densité, la propriété de l'élasticité parfaite donne les équations

$$PV = pv, \quad VD = vd, \text{ et } Pd = pD \ldots\ldots (\bullet).$$

Ces valeurs ne donnent que la pression exercée sur l'unité de surface; mais en faisant abstraction de la pesanteur, ou de toute autre force qui pourroit faire varier la densité lorsqu'on passe d'un point de la masse du fluide à un autre point, tout ce qui a été dit (269) s'applique ici : ainsi la pression p exercée sur la surface a sera

$$p = \frac{ad}{D}P, \text{ ou } p = \frac{aV}{v}P.$$

309. La pression s'évalue communément, ainsi qu'on l'a déja vu, par des poids : ainsi celle qui est exercée sur l'unité de surface, peut être représentée par le poids d'un prisme d'une substance quelconque dont d' seroit la densité, et dont la hauteur seroit donnée. Soit H cette hauteur pour P, et h pour p; on a Hd' pour la masse de ce prisme, $Hd'g$ est son poids, et $P = Hd'g$: de même $p = hd'g$. En substituant dans les valeurs (•), on a les équations $hD = Hd$, ou $hv = HV$. Cette première équation conduit de nouveau au théorême (305).

En substituant de même pour P sa valeur $Hd'g$ dans celles de p, on a pour la pression exercée sur la surface a

$$p = \frac{V}{v}.aHd'g = \frac{d}{D}aHd'g.$$

310. L'équation des fluides incompressibles et pesans, est en général $dp = -gDdz$, en comptant les z positifs de bas en haut; d'où on tire

$$gz = -\int\frac{dp}{D} + C \ldots\ldots\ldots (\pi).$$

Lorsque le fluide est compressible, il est évident que les couches les plus basses étant chargées du poids de toutes celles qui sont au-dessus, deux tranches horisontales de ce fluide, prises à différentes hauteurs, ne peuvent avoir même densité; D variera donc avec z et p, et la loi de cette variation dépendra de la nature du fluide. Si on suppose la température constante, l'intégrale de $\frac{dp}{D}$ sera facile à trouver, ou analytiquement, ou par les quadratures, puisque D ne sera fonction que de p.

S'il s'agit de l'air atmosphérique, en conservant l'hypothèse de l'uniformité de la chaleur, la densité D sera sensiblement proportionnelle à la pression : l'expérience a fait voir que ce fluide est pesant, élastique, et qu'il se comprime en raison inverse des poids dont il est chargé. Ces faits sont incontestables, et il n'est pas de notre sujet de nous en occuper. Consultez à cet égard le *Traité élémentaire de physique* de *Haüy*.

III. *Du Baromètre.*

311. Appliquons cette théorie au BAROMÈTRE. Cet instrument consiste en un tube recourbé *ABC*, fermé en *A* et ouvert en *d*; la partie *Ani* est entièrement vide d'air, et la partie *naBd* est remplie d'un fluide pesant, tel que du mercure. Les points *i* et *d* n'étant pas au même niveau, il est évident (266) que si aucune puissance n'est appliquée à l'orifice *d*, le mercure doit s'échapper par cet orifice, jusqu'à ce que la surface *ni* soit parvenue en *ab* au niveau de *d*. Mais dans l'état physique des choses, l'extrémité *A* étant bouchée, la surface *ni* n'est pressée par aucun poids supérieur. Or l'orifice *d* étant chargé du poids de la colonne d'air qui lui répond verticalement, et le fluide renfermé dans *aBC* étant de lui-même en équilibre, il faut, pour faire équilibre à la pression exercée en *d* par le poids de l'air, une colonne de mercure *nabi* dont, à bases égales, le poids soit identiquement le même que celui de la colonne d'air. Cette hauteur varie avec le ressort de l'air, elle est ordinairement de 27 pouces et demi, ou de 0,744 mètres : elle dépend du rapport des pesanteurs spécifiques des deux fluides (305). Fig. 139.

On peut donc se servir de cet instrument pour mesurer le ressort de l'air, par la hauteur à laquelle le mercure reste suspendu dans le tube. Pour cela on fait plonger un tube *AB*, vide d'air, fermé en *A* et ouvert en *B*, dans une cuvette de mercure *B* : la pression de l'air force ce fluide de monter dans le tube jusqu'en *C*. On fixe le tout sur une planche graduée, afin de mesurer les variations successives du niveau *C* du mercure. On regarde alors le mercure de la cuvette comme conservant le même niveau. Fig. 140.

Fig. 141. Comme cette dernière hypothèse n'est pas absolument conforme à la vérité, on peut employer un tube courbé ABC, formé en A et ouvert en C, conserver la branche BC un peu longue, et y laisser un espace FC occupé par l'air. Le niveau F variera alors dans la branche BC; mais comme le tube est de grosseur constante, on aura aisément, et par une simple soustraction, la différence de niveau, c'est-à-dire, la hauteur de la colonne de mercure suspendue. Il faut observer que dans les deux cas, la branche où le mercure est élevé doit être plus longue que 0,744 mètres, puisqu'alors ce fluide l'empliroit entièrement. Si on faisoit un baromètre avec de l'eau, il faudroit que le tube eût plus de 32 pieds, ou 10,4 mètres; car on peut voir (293) qu'une colonne d'eau de cette hauteur a le même poids qu'une colonne de mercure de $0{,}744^m$ de haut. Enfin on voit qu'un baromètre peut s'adapter à une *machine Pneumatique*, afin de connoître jusqu'à quel point on a fait le vide, ou raréfié l'air sous le récipient.

La constante h qui entre dans l'équation (ζ, 276), et qui provient du poids de l'atmosphère, est donc le poids de la colonne de mercure suspendue par le ressort de l'air, colonne qui a environ 28 pouces de haut, ou 0,744 mètres.

Fig. 140. 312. C'est donc dans le ressort de l'air, en contact avec les deux surfaces du mercure en B et en C, qu'on doit chercher la cause qui tient suspendu le mercure dans le tube; et il est aisé de reconnoître la fausseté de l'assertion des premiers physiciens, qui prétendoient que le mercure ne s'élevoit ainsi, que parce que *la nature avoit horreur du vide*. On voit aussi pourquoi cette prétendue horreur n'a lieu pour le mercure que jusqu'à 7 décimètres, et pour l'eau que jusqu'à 10 mètres environ.

Il est aisé de remarquer, que l'air renfermé exerce par

son ressort, la même pression que s'il agissoit librement par son poids, et qu'en conséquence la hauteur du mercure doit être la même dans un endroit fermé que dans l'air libre : cependant l'état de la température de l'atmosphère doit faire varier un peu cette hauteur ; car lorsque l'air devient plus chaud, le mercure se dilate et sa densité diminue : il faut donc alors un plus grand volume de mercure pour qu'il en résulte le même poids : ainsi le ressort de l'air étant supposé le même, la colonne de mercure doit avoir une plus grande hauteur pour lui faire équilibre. Mais la variation de densité du mercure n'étant guère sensible, on peut en faire abstraction dans les opérations qui n'exigent pas une grande exactitude.

313. L'explication que nous venons de donner du phénomène du baromètre, s'applique à une multitude de cas ; la pesanteur et le ressort de l'air servent à expliquer beaucoup d'autres faits.

Lorsqu'en appliquant les lèvres à l'ouverture d'un flacon, on aspire la liqueur qui y est contenue, le ressort de l'air restant, diminue à proportion : il n'est donc plus en état d'opposer du dedans au dehors, une pression égale à celle que l'air extérieur exerce du dehors au dedans. Les lèvres s'appliquent fortement sur les bords de l'ouverture ; et on a d'autant plus de peine à les dégager, qu'on a aspiré plus fortement.

Si dans un vase où il y a de l'eau, ou tout autre fluide, on plonge la branche la plus courte d'un tube courbé, ou syphon *DEF* ; et qu'on aspire en *F*, en suçant ou autrement, l'air contenu dans ce syphon ; l'eau montera et sortira par *F*, parce que la pression de l'air extérieur agit à la surface *AB*, et force le fluide de monter et de s'écouler : mais l'eau continuera ainsi de sortir en *F* jusqu'à ce que dans le vase elle soit descendue à l'ouverture *D*. En effet, Fig. 142.

quoique la pression en D et en F soit, à très-peu près, la même, néanmoins le poids de toute la colonne d'eau IF, la force à descendre, ce qui ne peut se faire sans produire un vide en E ; vide qui ne peut manquer d'être rempli, par l'action toujours présente de la pression de l'air sur la surface de l'eau dans le vase. Ainsi l'air n'agit, pendant l'écoulement, qu'avec un effort proportionnel à la différence IF de niveau, entre F et la surface de l'eau dans le vase ; ensorte que l'écoulement sera d'autant plus rapide, que les deux branches du syphon différeront davantage. Cependant on doit observer que ce n'est pas la longueur des deux branches qu'on doit considérer ici ; car on pourroit contourner de mille manières un tube sans pour cela obtenir un écoulement plus prompt : la rapidité de la chûte du fluide en F, dépend de la différence des hauteurs verticales de E au-dessus des deux extrémités F et D. Ces deux branches ne peuvent d'ailleurs être égales ; en outre la branche ED ne peut passer environ 10 mètres quand il s'agit de l'eau, puisqu'alors ce fluide ne pourroit parvenir en E. C'est à ce phénomène qu'on doit rapporter la cause de certaines fontaines intermittentes, etc. Voyez le *Traité élémentaire de physique* de *Haüy*.

314. L'un des usages les plus intéressans auxquels on ait destiné le baromètre, est l'application qu'on en a faite au nivellement : cette théorie est d'une trop haute importance pour que nous négligions de l'examiner. Il résulte de ce qu'on a vu que la densité des couches atmosphériques décroît à mesure qu'on s'élève, et par conséquent la colonne de mercure doit en même tems s'abaisser. Voici comment on a fait servir la connoissance de ces abaissemens à la détermination de la hauteur verticale z qui sépare deux lieux d'observation. Soient h et h' les hauteurs respectives du baromètre ; t et t' les températures, c'est-à-dire, les de-

grés qu'y marque le thermomètre, (pris avec leurs signes); enfin D et D' les densités de l'atmosphère. Nous accentuons les lettres qui se rapportent à la station la plus basse.

Simplifions d'abord les considérations en supposant la température constante. L'équation (π) d'équilibre des fluides pesans et élastiques est $gz = \int \frac{-dp}{D}$, or on sait que la pression varie proportionnellement à la densité (308); on a donc $p = \alpha g D$, d'où $dp = \alpha g dD$, α étant une constante inconnue : on en déduit . . . . $z = -\alpha . \int \frac{dD}{D} = -\alpha . \log D + C$; mais $z = 0$ donne $D = D'$; donc $z = \alpha . \log\left(\frac{D'}{D}\right)$, ou plutôt

$$z = \alpha . \log\left(\frac{h'}{h}\right)$$

parce que les densités sont proportionnelles aux pressions, et sont par conséquent entr'elles comme les hauteurs correspondantes du baromètre; passons des logarithmes népériens aux logarithmes tabulaires : (ce qui se fait en divisant par le module $k = 0{,}43429$) et désignons ces derniers par le signe L, nous aurons $z = \frac{\alpha}{k} . L\left(\frac{h'}{h}\right)$. Deluc ayant choisi parmi les résultats dus à l'observation ceux qui paroissoient mériter plus de confiance, et cherchant à déterminer la valeur numérique du facteur $\frac{\alpha}{k}$, fut conduit à un résultat d'une simplicité remarquable; car il trouva $\frac{\alpha}{k} = 10000$, la température étant d'environ 16,75° du thermomètre de Réaumur. Ainsi

$$z = 10000 \times L\left(\frac{h'}{h}\right).$$

Bouguer diminuoit de $\frac{1}{30}$ les résultats auxquels cette formule conduit.

315. Cette théorie repose sur diverses hypothèses absolument inadmissibles : car 1°. l'air ne se comprime pas proportionnellement aux poids dans toutes les limites ; 2°. à des élévations un peu considérables la gravité décroît ; 3°. les gaz et autres corps étrangers dont l'air est sans cesse chargé modifient la variation de sa densité ; 4°. comme on a reconnu que l'air se refroidissoit graduellement à mesure qu'on s'élevoit, l'hypothèse de la température constante est démentie par l'expérience ; 5°. enfin le baromètre étant lui-même soumis aux impressions de la chaleur, le fluide métallique qui compose cet instrument éprouve des changemens de dimension (312) auxquels on ne peut négliger d'avoir égard. Ces deux dernières circonstances sont même celles qui influent d'une manière plus décisive dans les expériences, et ce sont elles que les physiciens ont eues pour objet lorsqu'ils ont voulu corriger la théorie précédente.

Comme l'usage du baromètre est beaucoup plus expéditif et plus commode que celui des instrumens de géométrie, il étoit très-important de se procurer une formule susceptible d'une plus grande précision. Plusieurs savans se sont efforcés d'y parvenir en faisant subir à la précédente des corrections. Deluc évaluoit à $0,075^{li}$. la quantité dont la colonne de mercure s'allonge ou se raccourcit dans le baromètre par chaque degré du thermomètre de Réaumur. Après avoir corrigé les hauteurs du mercure, il employoit une correction pour le coefficient $\frac{a}{k}$. Il avoit observé qu'on pourroit lui conserver la valeur 10000 lorsque la tempéra-

ture moyenne étoit 16° $\frac{3}{4}$; mais que l'air variant du 215e. de son volume pour chaque degré, il falloit augmenter ou diminuer le produit de sa 215e. partie multipliée par la différence entre 16° $\frac{3}{4}$ et la température moyenne. Ainsi on trouve pour la formule de Deluc, toutes réductions faites,

$$z = \frac{1000}{43}(396{,}5 + t + t')\, L\left(\frac{h'}{h}\right).$$

Trembley, par des expériences plus nombreuses, a trouvé la formule

$$= \frac{10000}{384}(361 + t + t')\, L\left(\frac{h'}{h}\right).$$

Ces formules sont rapportées à la toise prise pour unité : et il paroît que la dernière est la plus exacte. Mais l'une et l'autre n'ont été obtenues que par une suite d'expériences peu correctes, et on sent que de tels procédés ne peuvent conduire qu'à une détermination très-vague.

316. Laplace a donné, page 81 de l'*Exposition du système du monde*, une solution fort élégante du problème qui nous occupe ; cet illustre savant, qui a rendu des services si marqués à la physique et à la chimie, et qui n'est étranger à aucune branche de sciences, a complétté tout-à-fait la théorie dont il s'agit. Il falloit faire subir à notre formule une double correction ; l'une relative à la dilatation du mercure, qui n'étant qu'un effet purement thermométrique, n'entre pour rien dans la mesure de la densité de l'air ; l'autre qui provient de la détermination du coefficient α. Nous supposerons d'abord que la température est constante dans l'étendue dont il s'agit, mais nous la regarderons comme moyenne entre les températures observées, et $= \frac{1}{2}(t + t')$: en déterminant le coefficient α d'après cette hypothèse, nous aurons un résultat fort appro-

ché, puisque les températures diffèrent ordinairement peu.

Les hauteurs du mercure n'étant plus proportionnelles aux densités, à cause de la dilatation du fluide métallique, il convient de changer h, afin de dégager l'expérience de cet effet, et de la ramener à ce qu'elle auroit été si en partant du lieu inférieur, le mercure avoit conservé la même densité à la région supérieure. Or on sait que pour chaque degré du thermomètre centigrade, le mercure se dilate de $\frac{1}{5412}$; ainsi la hauteur h observée à la région la plus élevée (et la plus froide) doit devenir $h + \frac{h(t' - t)}{5412}$ ou $h\left(1 + \frac{t' - t}{5412}\right)$: valeur qui doit remplacer h dans notre formule.

De plus, pour ramener la détermination du coefficient a à des expériences déja faites, nous supposons d'abord que la température moyenne $\frac{1}{2}(t + t')$ répond à la glace fondante : sauf à corriger ensuite l'erreur qui résultera de cette hypothèse. Alors la pression P qui a lieu à la hauteur Z, donnant une hauteur H pour la colonne de mercure, on a $P = agD = g\delta H$, δ étant la densité du mercure à la température 0 ; cela résulte de ce que P est le poids de l'atmosphère, qui est égal à celui de la colonne de mercure. On a donc $a = H.\frac{\delta}{D}$. Or à cette même température le baromètre étant à la hauteur $H = 0^m,76$ (28 pouces) au niveau des mers, on a $\frac{\delta}{D} = 10263$, d'après les expériences les plus précises. Ainsi $a = 7805$. En divisant par le module $k = 0,43429$, on a pour le coefficient des logarithmes tabulaires $\frac{a}{k} = 17972^m$, la température moyenne étant celle de la glace fondante.

Voyons maintenant quelle correction nouvelle il faut faire subir à cette valeur, lorsque la température moyenne est différente de celle que nous avons prise pour terme de comparaison. La manière dont la théorie se présente maintenant nous permet de considérer l'opération comme faite avec un instrument inaltérable aux impressions de la chaleur, et de supposer que la température, ayant d'abord été zéro, se soit tout-à-coup élevée à $\frac{1}{2}(t+t')$, dans toute la région d'atmosphère comprise entre les deux stations; par là on voit que l'air en se dilatant, devient d'une moindre densité, et qu'il faut s'élever davantage pour faire baisser le baromètre d'une égale quantité : si on supposoit donc $\frac{a}{k} = 17972$ sans correction, on auroit un résultat trop foible. Pour lui rendre sa juste valeur, on a observé que l'air et tous les gaz se dilatent de $\frac{1}{250}$ pour chaque degré du thermomètre centigrade : ainsi la quantité dont on devra augmenter le coefficient $\frac{a}{k}$ est égale au produit de ce coefficient par la 250e. partie du nombre de degrés de la température moyenne $\frac{1}{2}(t+t')$; d'où on voit qu'il faut remplacer $\frac{a}{k}$ par $\frac{a}{k} + \frac{1}{250} \cdot \frac{a}{k} \cdot \frac{1}{2}(t+t')$, ou ...

$$\frac{a}{k}\left(1+\frac{t+t'}{500}\right) = 17972\left(1+\frac{t+t'}{500}\right).$$

En ayant égard à ces corrections, on a pour la différence de niveau des lieux d'observation

$$s = 17972\left(1+\frac{t+t'}{500}\right).L\left\{\frac{h'}{h} \times \frac{r}{1+\frac{t'-t}{5412}}\right\},$$

ou si on veut

$$z = 35{,}944\,(500 + t + t')\,L\left\{\frac{5412\,h'}{h\,(5412 + t' - t)}\right\}\ldots(g).$$

Saussure nous donne dans son *Voyage des Alpes*, n°. 2003, le résultat de ses propres observations; il en résulte qu'à un mètre au-dessous de la cime du Mont-Blanc le baromètre marque $0^m,4342$, tandis que le thermomètre centigrade indique $-2^d,87$: d'une autre part à 25,31 mètres au-dessus du lac de Genève on observoit le baromètre à $0^m,7385$, et le thermomètre à $28^d,25$. Comme on peut compter sur la rigoureuse exactitude de ce physicien célèbre, il peut être intéressant d'appliquer notre formule à cet exemple. Elle devient dans le cas présent

$$z = 35{,}944 \times 525{,}38 \times L\frac{5412 \times 0{,}7385}{5443{,}12 \times 0{,}4342} = 4508^m,86.$$

Ajoutant 26,31 mètres, on a donc pour la hauteur totale du Mont-Blanc $4538^m,17$ ou environ $2224^{toises},5$; résultat qui est d'environ 13 toises plus petit que celui que les mesures trigonométriques de Pictet ont produit. Cette erreur n'est certainement due qu'à la détermination des quantités qui servent de base à la formule précédente; et lorsque des expériences plus rigoureuses les auront fait connoître d'une manière exacte, on pourra compter sur une approximation beaucoup plus grande.

Le baromètre ordinaire est peu propre à mesurer les hauteurs parce qu'en le renversant pour le transporter, l'extrémité inférieure du tube cessant de plonger dans le mercure, il se forme un passage dans lequel l'air en s'introduisant divise la colonne, et détruit l'effet qu'on doit attendre de l'instrument. On se sert d'un baromètre portatif qui a son extrémité inférieure hermétiquement fermée et qui a son ouverture disposée latéralement à quelques

lignes du fond du réservoir. De sorte que lorsqu'on renverse le baromètre, le mercure, baignant toujours cette ouverture, empêche l'air de s'y introduire.

IV. *Des Pompes.*

317. Après ce que nous venons de dire sur le poids et le ressort de l'air, et sur la pression des fluides en général, il est facile d'entendre comment l'eau s'élève dans les POMPES. Il y a dans une pompe trois parties principales à considérer, les pistons, les soupapes et les tuyaux. Le *Piston* est un corps *AB* de base circulaire, qui peut parcourir, en la remplissant exactement, la capacité intérieure d'un cylindre creux, qu'on appelle *Corps de pompe*; ce cylindre est fermé, dans une section de sa hauteur, au moyen d'un petit couvercle *E*, à charnière, qui bouche très-exactement l'orifice auquel il est adapté; ce couvercle se nomme *Soupape*, il est destiné à permettre et fermer alternativement le passage à l'eau. Une semblable soupape est adaptée au piston en *L*. Un tuyau *FGHK* est uni au corps de pompe; il a son extrémité inférieure plongée dans l'eau, dont je suppose que *RS* est le niveau. Nous entendrons par *base* du piston sa section horisontale. Fig. 143 et 144.

On distingue deux espèces de pompes, destinées à faire monter l'eau : l'une produit cet effet, en aspirant l'air contenu dans le corps de pompe, on la nomme *Pompe aspirante* : l'autre agit en foulant le fluide, on l'appelle *Pompe foulante*. Expliquons le jeu de ces deux machines.

318. Supposons que l'eau étant au même niveau *RS* dans le réservoir et dans le tuyau *KH* d'aspiration, une force *P* appliquée à la tige du piston, l'élève en *O* : l'espace qu'occupoit l'air renfermé dans le corps de pompe *VD* Fig. 143.

se trouvera plus grand, et l'air remplira l'espace que le piston laissera libre; ainsi son ressort diminuera; l'air renfermé dans le tuyau d'aspiration *HK* exerçant sur la soupape dormante *E* un effort plus grand, que ne le fait l'air renfermé dans le corps de pompe, au-dessous du piston, cette soupape se lèvera et l'air du tuyau d'aspiration affluera dans le corps de pompe, jusqu'à ce qu'il soit parvenu à avoir la même densité, et par conséquent le même ressort dans ces deux espaces. Alors la soupape *E*, également pressée des deux côtés, se refermera par son propre poids, et interceptera de nouveau la communication entre le tuyau d'aspiration et le corps de pompe. Mais l'air renfermé dans le tuyau d'aspiration, étant raréfié pour se mettre en équilibre avec celui du corps de pompe, n'exerce plus sur la superficie du fluide intérieur une pression égale à celle qu'éprouve le fluide extérieur. L'excès de pression de la part de l'air extérieur, fera donc monter l'eau dans le tuyau *HK* à une certaine hauteur *N* telle que le poids de la colonne de fluide *NH*, joint à la pression de l'air intérieur, équivale au poids d'une colonne de fluide de 10 mètres de haut environ. On remarque que l'élévation de l'eau, diminuant le volume de l'air intérieur, augmente sa densité ainsi que celle du corps de pompe qui se rétablit en partie par le moyen de la soupape *E*. L'équilibre ainsi rétabli, si on baisse le piston, l'air renfermé dans le corps de pompe au-dessous du piston, se condensera, sans néanmoins agir sur l'air renfermé dans le tuyau d'aspiration avec lequel il n'a plus de communication : ainsi l'eau restera dans ce tuyau dans le même état. Cependant l'abaissement du piston, qui doit approcher autant que possible de la soupape *E*, devient assez grand pour rendre l'air compris entre cette soupape et la base du piston, plus dense que l'air extérieur. Cet air fait alors lever la sou-

pape L, par son excès de ressort : ainsi il communique avec l'air extérieur et acquiert la même densité que lui ; la soupape L se referme ensuite par son propre poids. Si on recommence la même manœuvre, l'eau s'élèvera de nouveau ; en sorte qu'après un certain nombre de coups de piston, elle gagnera le corps de pompe ; où étant une fois entrée, elle passera, à chaque abaissement du piston, par le trou de la soupape L : cette soupape se fermant par son poids retiendra au-dessus d'elle l'eau qui aura passé, et que l'on élèvera en même tems que le piston. Tel est le jeu de la pompe aspirante.

319. Quant à la pompe foulante, voici ses effets. Lors- Fig. 144.
qu'on fait descendre le piston PCD, que je suppose ici, placé au-dessous du niveau de l'eau RS, il se fait un vide entre la soupape E, qui est alors fermée, et la base du piston. Le poids de l'eau agissant, conjointement avec celui de l'air extérieur, contre la soupape L, fait passer l'eau dans le corps de pompe. Lorsque l'eau cesse d'entrer, la soupape L se ferme. Alors si l'on remonte le piston, il chasse devant lui l'eau qui est entrée, force la soupape E de se lever, et introduit l'eau dans le tuyau EY. Le piston une fois élevé, la soupape E se ferme, et retient l'eau, jusqu'à ce que, par un autre effort semblable au premier, on en fasse passer de nouvelle : ainsi l'eau s'élèvera dans le tuyau EY à proportion du nombre de coups de piston. Quelquefois cette pompe agit en foulant de haut en bas, quelquefois le piston est placé au-dessus du niveau de l'eau, (voyez l'*Architecture hydraulique*, page 310) ; mais dans toute disposition, l'effet s'explique d'une manière analogue.

320. On forme des pompes qui réunissent les effets des Fig. 145.
deux précédentes, et qu'on nomme pour cela *Pompes*

foulantes et aspirantes. Le piston *AB* n'est point ici muni d'une soupape : lorsqu'il s'élève, il fait entrer l'eau dans l'espace *CVKH*, comme dans la pompe aspirante : lorsqu'il s'abaisse, il foule l'eau contenue dans cet espace, laquelle ne pouvant s'échapper par la soupape *E* qui se ferme d'elle-même, lève la soupape *L*, et passe dans le tuyau *MO*. On peut varier beaucoup la construction et la disposition des parties des pompes; mais leurs effets s'expliqueront toujours facilement par ce que nous venons d'exposer.

321. La quantité d'eau que donne une pompe à chaque coup de piston, pendant un tems déterminé, se trouve en considérant qu'à chaque coup de piston il sort un volume d'eau équivalent à un cylindre, dont la base est celle du piston, et dont la hauteur est la quantité dont il s'élève dans le corps de pompe. Quant à la force qu'il faut employer pour mouvoir le piston, de bas en haut, en faisant abstraction du frottement et du poids du piston, *elle soutient le poids d'une colonne d'eau, qui auroit pour base celle du piston, et pour hauteur celle dont l'eau est élevée dans la pompe au-dessus de la surface du réservoir.*

Fig. 144. En effet, dans la pompe foulante noyée la chose est évidente; car le poids de la masse fluide, qui est entre la base *CD* et le niveau *RS*, ne charge pas le piston, puisqu'elle est portée par l'action de l'air : ainsi la base *CD* du piston n'est pressée que par la colonne d'eau qui est depuis le niveau *RS* jusqu'à la lame supérieure : cette pression est, comme on a vu (277), conforme au théorême.

Fig. 143. Si la pompe est aspirante, le piston est d'une part visiblement chargé de toute la colonne d'eau qui est au-dessus : de l'autre, comme l'eau ne peut monter à chaque

soup de piston que par l'effet de la puissance, et ne peut être soutenue que par la pression que l'air extérieur exerce sur la surface *RS*; cette pression n'est donc plus capable de faire équilibre à celle de l'air, qui agit sur la surface supérieure de l'eau dans le corps de pompe. Cette surface est donc surchargée d'un poids équivalent à la colonne d'eau qui auroit pour base celle du piston, et dont la hauteur seroit égale à la distance de *AB* à *RS*. Ainsi la force qui anime le piston porte ce double poids. Ce qui est conforme à ce qu'on a dit.

Si la pompe foulante n'est pas noyée; ce dernier rai- Fig. 148.
sonnement s'y applique facilement. A l'égard de l'effort qu'il faut exercer pour faire descendre le piston, il est clair qu'il se réduit à vaincre le frottement, puisqu'en vertu du poids du piston dans l'eau, ce corps doit descendre de lui-même.

Dans la pompe foulante et aspirante, l'effort du moteur Fig. 148.
doit être considéré dans deux circonstances différentes, savoir lorsque le piston monte et lorsqu'il descend. Quand le piston monte, il n'éprouve aucune pression de la part de l'eau renfermée dans le tuyau montant *MO*, parce que la soupape *L* est alors fermée; le moteur est donc dans le cas de la pompe aspirante, et porte une colonne d'eau, qui a pour base celle du piston, et pour hauteur sa distance à la superficie du réservoir. Lorsque le piston descend, comme la soupape dormante *E* est alors fermée, l'effort du moteur doit faire équilibre au poids d'un cylindre d'eau, qui auroit pour base celle du piston, et pour hauteur la différence de niveau du fluide, dans le corps de pompe et dans le tuyau montant. On remarquera que la somme de ces deux efforts, dans cette machine qui rassemble les effets des deux pompes, est la pression totale du piston dans cette dernière: mais ici on

a l'avantage de n'en faire éprouver au piston qu'une partie à-la-fois.

322. Par le moyen de la pompe foulante on peut élever l'eau à telle hauteur que l'on veut, pourvu que la soupape dormante soit au-dessous du niveau dans le réservoir, et qu'on emploie une force suffisante. Il en est de même de la pompe aspirante lorsque le tuyau d'aspiration a moins de 10 mètres de haut, et que le piston descend à chaque coup jusqu'à la soupape dormante *E*. Mais quand la première de ces deux conditions n'a pas lieu, le fluide ne peut monter jusqu'à cette soupape; et si la seconde n'est pas remplie, il peut arriver que l'eau s'arrête à un certain terme quelque nombre de coups de piston que l'on donne. Pour comprendre ceci, supposons
Fig. 143. que l'eau soit déja élevée en *I*; il est clair que lors de la levée du piston l'eau ne monte qu'autant que le *ressort* affoibli de l'air dilaté intérieur (c'est-à-dire, la pression qu'il exerce à la surface du fluide en *I*) plus le poids de la colonne d'eau *IH*, déja élevée au-dessus du niveau du réservoir, équivalent à la pression de l'air extérieur à la surface *RS*, et par conséquent au poids d'une colonne d'eau d'environ 10 mètres de haut. Il faut donc que le ressort de l'air intérieur augmenté du poids de la colonne fluide *IH*, soit moindre que celui d'une colonne d'eau d'environ 10 mètres de haut pour que le fluide monte. Pour déterminer les cas où cette condition n'est pas satisfaite, analysons toutes les circonstances que peut leur offrir le jeu d'une pompe.

Fig. 143. 323. Désignons par *e* et *E* les espaces *EI* et *EO* compris depuis la soupape dormante *E* jusqu'au point *I* le plus bas et au point *O* le plus élevé de la course du piston: par *y* et *a* les distances *EN* et *EH* entre cette même soupape

et le niveau du fluide dans le tuyau d'aspiration et dans le réservoir : par s la section transversale du tuyau d'aspiration KH : par ϖ et ϖ' les pesanteurs spécifiques de l'air extérieur et de l'air raréfié renfermé dans le tuyau d'aspiration lorsque le piston est baissé : enfin par x et h le ressort de l'air intérieur et extérieur ; c'est-à-dire, que x est la hauteur d'une colonne d'eau qui exerceroit en N la même pression que l'air raréfié renfermé dans le tuyau d'aspiration ; et que h est la hauteur d'environ 10 mètres, qui est celle d'une colonne d'eau, dont le poids est égal à la pression de l'air atmosphérique.

Lorsque le piston est baissé, l'eau ne reste suspendue dans le tuyau d'aspiration qu'à la hauteur $a - y$ qui convient pour que les pressions causées par le ressort intérieur et le poids de ce fluide équivalent à la pression de l'air extérieur ; on a donc $h = x + a - y$. Par la nature du jeu de la pompe, l'air renfermé en IV dans le corps de pompe est de l'air naturel ; son volume étant e, son poids est donc ϖe. Quant à l'air renfermé dans le tuyau d'aspiration, son volume est sy ; son poids est donc $\varpi' sy$; mais on a visiblement $\frac{h}{x} = \frac{\varpi}{\varpi'}$, d'où $\varpi' = \frac{\varpi x}{h}$: ainsi le poids de cet air est $\frac{\varpi x s y}{h}$. Il suit de là que $\varpi\left(e + \frac{xsy}{h}\right)$ est le poids total de l'air renfermé en IN.

Les choses étant dans cet état, si on lève le piston, l'air se trouve avoir la même densité dans toute l'étendue intérieure, et l'eau monte dans le tuyau d'aspiration. Soient x' et y' ce que deviennent alors x et y. L'équilibre entre les pressions intérieures et extérieures exige qu'on ait comme ci-dessus $h = x' + a - y'$; de sorte qu'en faisant $h - a = b$, on a

$$x - y = b, \text{ et } x' - y' = b \ldots\ldots (1).$$

Mais l'air intérieur occupe maintenant l'espace $E + y's$ au lieu de l'espace $IN = e + ys$ qu'il occupoit d'abord. Si l'espace intérieur contenoit de l'air naturel, son ressort seroit h et son poids $\varpi(E + sy')$; comme ici l'air est dilaté et que son poids est, comme ci-dessus, $\varpi\left(e + \frac{sxy}{h}\right)$; on a donc la proportion

$$\frac{\varpi(E + sy')}{\varpi\left(e + \frac{sxy}{h}\right)} = \frac{h}{x'}, \text{ d'où } x' = \frac{he + sxy}{E + sy'} \ldots\ldots\ldots (2).$$

Telle est la hauteur de la colonne d'eau qui exerceroit la même pression que cet air dilaté exerce à la surface du fluide dans le tuyau d'aspiration. Eliminons y' et y entre les trois équations précédentes (1) et (2), nous aurons

$$x' = \frac{bs - E}{2s} \pm \sqrt{\left\{\left(\frac{bs - E}{2s}\right)^2 + \frac{he}{s} + x^2 - bx\right\}} \ldots (e)$$

On ne prendra d'ailleurs que celle des deux racines qui donne $x' < h$; la valeur de y' sera connue par l'équation $y' = x' - b$.

On peut, au moyen de ces deux équations, trouver les densités successives de l'air, et les hauteurs auxquelles l'eau s'élève à chaque coup de piston. En effet, supposons qu'il n'y ait eu aucun coup de piston donné, on a $x = h$, et les valeurs de x' et y' que donnent alors les équations précédentes, font connoître le ressort de l'air, et l'élévation de l'eau après le premier coup de piston : substituant pour x, dans les mêmes équations, la valeur qu'on vient de trouver pour le ressort de l'air, on aura les valeurs de x' et y' répondantes au second coup de piston; et ainsi de suite. On pourra même par là trouver combien chaque coup de piston élève l'eau, en prenant les différences successives des valeurs de y.

324. Puisqu'on a $y - y' = x - x'$, s'il arrivoit que l'eau cessât de monter, comme on auroit $y - y' = 0$, il en résulteroit $x - x' = 0$, la valeur (2) de x' deviendroit donc $x = \frac{e}{E} h$, et celle de y seroit . . . . . $y = a - \frac{E-e}{E} . h$. Il résulte de ces équations que lorsqu'il y a un espace e entre le point le plus bas de la marche du piston et la soupape dormante, l'eau pourra s'arrêter avant d'arriver à cette soupape, et cet effet aura lieu toutes les fois que l'on aura $a > \frac{E-e}{E} h$ puisque y doit devenir négatif quand l'eau passe au-dessus de la soupape dormante. Si cette soupape est à la séparation V du corps de pompe et du tuyau d'aspiration, le rapport $\frac{E-e}{E}$ sera celui de la longueur que parcourt le piston, à la distance comprise entre le point V et le plus haut point de sa course. Le cas de $a = \frac{E-e}{E} h$ donne $y = 0$, et alors l'eau doit monter jusqu'à la soupape dormante : celui où on a $a < \frac{E-e}{E} h$ rend y négatif, et alors l'eau doit s'élever au-dessus de cette soupape. S'il n'y a pas d'espace entre le point le plus bas de la marche du piston, et la soupape dormante, alors l'eau doit toujours monter ; car si on fait $e = 0$ dans $Ex = eh$ on trouve $E = 0$, ce qui signifie que pour que l'eau cessât de s'élever, il faudroit que le jeu de la pompe fût nul. D'ailleurs on a $y = a - h$ valeur négative, à cause de $h > a$: ainsi l'eau parviendra toujours au-dessus de la soupape dormante.

325. Supposons maintenant que la soupape dormante soit au niveau de l'eau du réservoir, ou même plus basse,

ou bien qu'étant placée en un point quelconque, on est parvenu à faire monter l'eau au-dessus de cette soupape, et qu'on veut continuer de l'élever au moyen de l'aspiration. Ces divers cas, qui n'en forment qu'un et rentrent les uns dans les autres, se traitent de même. Soient E et
Fig. 143. e les espaces compris depuis la jonction K du tuyau d'aspiration et du corps de pompe, jusqu'aux points le plus haut et le plus bas de la course du piston. Nommons y et a les distances respectives de ce point de jonction K aux surfaces de l'eau dans le tuyau et dans le réservoir : s, x', h et b désignent la même chose que ci-dessus.

Lorsque le piston est baissé, l'air qui est renfermé au-dessous, tant dans le corps de pompe que dans le tuyau d'aspiration, est de l'air naturel, qui occupe un espace $= e + sy$. Le piston venant ensuite à être levé, cet air se dilate, il se fait une ascension d'eau dans le tuyau d'aspiration, et la hauteur y devient y' : ainsi l'air dilaté occupe l'espace $E + sy'$. Puisque le ressort de l'air est en raison inverse de l'espace qu'il occupe, on aura la proportion

$$\frac{x'}{h} = \frac{e + sy}{E + sy'}, \text{ d'où } x' = \frac{e + sy}{E + sy'} h.$$

On a, en outre, comme ci-dessus, $x' - y' = b$. Ainsi on peut de même éliminer et calculer les dilatations successives de l'air, et les ascensions correspondantes de l'eau.

326. Le fluide cessera de monter, si on a dans quelques cas $y' = y$. Cette hypothèse donne $x' = \frac{e + sy}{E + sy} h$: or $y' = x' - b = y$; donc on aura . . . . . $sy^2 + y\,(E - as) = eh - Eb$. Si cette équation n'a pas ses racines imaginaires, on aura deux points, entre

lesquels l'ascension de l'eau cesse d'avoir lieu, l'effet de l'aspiration devenant nul à ces points, et négatif dans l'intervalle qui les sépare, de telle sorte que l'eau redescendroit si la soupape dormante ne s'y opposoit pas. Cette quantité deviendra imaginaire quand on aura $\frac{1}{4}(a+m)^2 < hi$, en faisant $i = \frac{E-e}{s} =$ le jeu du piston, et $\frac{E}{s} = m =$ la plus grande hauteur du piston, au-dessus du lieu de jonction du corps de pompe et du tuyau d'aspiration. Donc *pour que la pompe aspirante produise infailliblement son effet, il faut que le quarré de la moitié de la plus grande hauteur du piston au-dessus du niveau de l'eau, soit plus petit que le produit du jeu du piston par* h ; c'est-à-dire, par environ 10 mètres.

Les différens cas que nous venons d'analyser suffiront pour jetter le plus grand jour sur cette matière. On peut consulter à cet égard l'Architecture hydraulique du cit. *Prony*, ouvrage dans lequel cette théorie est traitée avec le plus grand détail, et dont nous avons extrait ce qui précède.

Fin de l'Hydrostatique.

LIVRE IV.

HYDRODYNAMIQUE.

I. *Ecoulement des fluides pesans et incompressibles par des orifices horisontaux.*

527. La complication des diverses théories du mouvement des fluides, le peu d'accord des résultats qu'elles donnent avec ceux que l'expérience fait connoître, nous déterminent à nous renfermer dans un petit nombre de propositions. Ce que nous dirons ici sur l'hydrodynamique ne sera donc qu'une très-petite partie de cette science; mais la nature de cet ouvrage nous en impose la loi. Consultez les mécaniques *Céleste et Analytique*, où cette matière est traitée à fond, avec tous les développemens qu'elle comporte. La théorie que nous allons exposer ici est due à *Prony*, qui l'a donnée dans son *Architecture hydraulique*, et plus particulièrement dans un Mémoire détaché qu'il a publié pour l'instruction des élèves de l'Ecole polytechnique.

Nous supposerons ici, comme un fait dû à l'expérience, que *lorsqu'un fluide s'écoule d'un vase par un orifice horisontal, toutes les tranches horisontales du fluide conservent en s'abaissant leur parallélisme*, de sorte que tous les points d'une même tranche ont la même vîtesse verticale. Et pour rendre cette hypothèse plus conforme avec les observations, nous supposerons 1°. que les parois du vase conduisent à l'orifice sans rompre la loi de continuité. 2°. Que la distance entre la surface supérieure

du fluide et l'orifice est assez considérable pour qu'il ne se produise pas cette sorte d'entonnoir qu'on y remarque quelquefois.

328. Imaginons donc un vase de forme invariable $ss'qp$ de position fixe, ouvert à sa partie inférieure par un orifice pq dont le périmètre est une courbe située dans un plan horisontal et dont l'aire $= k$. Soit, au bout du tems t, AB la surface supérieure du fluide; désignons par K l'aire $ARBr$ qui est donnée en fonction de la hauteur constante ou variable $QR = h$, d'après la figure du vase. On peut en dire autant d'une section horisontale indéterminée $tu = y$ qui sera donnée en fonction de $QC = z$. La surface de la paroi intérieure du vase est donnée en fonction de x', y' et z'; et le plan $x'y'$ est horisontal et passe par l'orifice pq. Fig. 14.

Si on conçoit le fluide partagé en une infinité de tranches horisontales telles que $TVut$, il faudra par hypothèse, que toutes les molécules qui composent l'une de ces tranches aient la même vîtesse verticale; soit v celle de $TVut$. Toutes ces tranches agissent les unes sur les autres dans toute l'étendue RQ; ensorte que si la vîtesse des unes est accélérée par le poids de celles qui sont au-dessus d'elles, la vîtesse de celles-ci est diminuée par les autres dont l'écoulement ne se fait pas avec la même rapidité que si le fluide tomboit librement. Nous désignerons par u la vîtesse du fluide qui s'écoule, au bout du tems t, par l'orifice pq; et par p la pression verticale exercée de bas en haut à la surface tu, au même instant.

La nature du problême que nous nous proposons de résoudre comporte deux sortes de variations qu'il est important de bien distinguer. Tantôt on a pour but de considérer les espaces décrits par une molécule *dans des tems*

successifs; nous affecterons, comme précédemment, du signe d, les différentielles que cette circonstance introduira, et par $\int$ les intégrales qui y seront relatives. Tantôt aussi on considère, *au même instant*, deux molécules de la masse fluide, déterminées par des valeurs de z différentes : nous emploierons la caractéristique δ pour distinguer les différentielles qui se rapportent à ce cas, et par S les intégrales qui en dépendent. Les deux signes δ et S sont uniquement relatifs à la forme du vase, et ils sont absolument indépendans du tems et du mouvement. Ainsi nous entendrons par δz, l'épaisseur HC de la tranche infiniment mince $tuVT$, et par δy la différence entre les aires tu et TV qui lui servent de base. Tandis que ds sera l'espace vertical que décrira l'aire tu dans l'instant dt; et que dy sera l'accroissement correspondant que cette aire devra éprouver. On peut remarquer que ces distinctions, commandées par la nature du problême, reviennent à celles que nous avons déja employées (259).

Cette notation établie, considérons le mouvement de la tranche $tuVT$ au bout du tems t. La densité étant $= 1$, le volume et la masse de cette tranche sont $y\delta z$. L'hypothèse du parallélisme des tranches, nous permet de la regarder comme solide, pendant l'instant dt, et comme soumise à l'action de trois forces, savoir : les pressions p et $p + \delta p$ qu'éprouve l'unité de surface de chaque base, et la gravité. Faisons donc abstraction de toute autre circonstance. On a

1°. Le poids de la tranche qui est $gy\delta z$.

2°. La pression totale py exercée sur la base tu.

3°. La pression totale $(p + \delta p)(y + \delta y)$ qu'éprouve la base TV. Cette dernière dirigée en sens contraire, se compose de deux autres; l'une $(y + \delta y)\,p$ fait équilibre

à celle py qu'éprouve la base opposée, parce que ces forces sont proportionnelles aux surfaces $y + \delta y$ et y sur lesquelles elles agissent (269) : la seconde $(y + \delta y)\,\delta p$, ou $y\delta p$ a son entier effet.

La force motrice est donc $gy\delta z + y\delta p$; et en divisant par $y\delta z$, qui est la masse de la tranche, on a $\frac{g\delta z + \delta p}{\delta z}$ pour la force (221) accélératrice $\frac{dv}{dt}$ qui agit sur chacune de ses molécules. Donc $\delta p = -g\delta z + \frac{dv}{dt}.\delta z$; et intégrant par rapport au signe δ,

$$p = -gz + S\frac{dv}{dt}.\delta z \ldots\ldots (1).$$

Observons que la vîtesse v est une fonction de z et t ; car elle dépend non-seulement du tems auquel on la cherche, mais encore du lieu qu'occupe dans le vase la molécule dont on demande la vîtesse à cet instant. Pour obtenir notre intégrale, observons qu'en vertu de l'incompressibilité, il doit s'écouler, en même tems, par chaque section horisontale du vase la même quantité de fluide : $kudt$ et ydz sont les volumes qui s'écoulent par l'orifice k et la section y durant l'instant dt ; on a donc

$$(2) \ldots kudt = -ydz, \text{ d'où } ku = -yv.$$

On met ici le signe — parce que z décroît lorsque t croît. En différentiant par rapport à t la valeur $v = -k.\frac{u}{y}$, on a $dv = \frac{kudy - kydu}{y^2}$; ce qui change

$$S\frac{dv}{dt}.\delta z \text{ en } S\left\{\frac{ku}{y^2}.\frac{dy}{dt}.\delta z - \frac{k}{y}.\frac{du}{dt}.\delta z\right\}.$$

Comme t, u et du sont constans relativement à l'é-

pèce de variation dont il s'agit ici, l'intégrale est $ku.S\frac{dy}{dt}.\frac{\delta z}{y^2} - k.\frac{du}{dt}.S\frac{\delta z}{y}$. Or y étant connu en fonction de z par la figure du vase, $S\frac{\delta z}{y}$ est une fonction connue de z, qu'on peut représenter par n; l'intégrale doit d'ailleurs être prise dans l'étendue QH, et par conséquent $n = 0$ lorsque $z = 0$. Pour effectuer l'autre intégration, nous ferons $dz = -\delta z$; c'est-à-dire, que nous regarderons l'épaisseur de chaque tranche comme égale à l'espace qu'elle décrira dans l'instant dt suivant; ce qui revient à dire qu'on conçoit, au bout du tems t, le fluide comme partagé en tranches horisontales d'inégale épaisseur, mais contenant toutes la même quantité de fluide, qui est celle qui s'écoule pendant l'instant dt suivant et qui a pour volume ydz. Ainsi $y\delta z$ est constant et $= -ydz$; tandis que δy devient $= dy$. Donc

$$S\frac{dy}{dt}.\frac{\delta z}{y^2} = -y.\frac{dz}{dt}\,S\frac{\delta y}{y^3} = -y.\frac{dz}{dt}.\frac{-1}{2y^2} + C.$$

Et comme la formule (2) donne $\frac{dz}{dt} = -k.\frac{u}{y}$, notre intégrale devient $-\frac{ku}{2y^2} + C$. Ainsi l'équation (1) devient

$$p = -gz - \frac{k^2u^2}{2y^2} - kn.\frac{du}{dt} + A.$$

On détermine la constante A en observant qu'à l'orifice k on a $z = 0$, $n = 0$, $y = k$ et $p = P$ = la pression que l'atmosphère exerce sur l'orifice. Donc $A = P + \frac{1}{2}u^2$, ce qui donne

$$p = P - gz - kn.\frac{du}{dt} + \frac{1}{2}u^2\left(1 - \frac{k^2}{y^2}\right) \ldots\ldots (3).$$

Cette équation fait connoître la pression p qu'éprouve l'unité de surface de la tranche dont l'ordonnée est z, à un instant déterminé, lorsqu'on connoît les valeurs de u et $\frac{du}{dt}$, en fonction de z, à cet instant. Pour les obtenir, observons que si on applique aux variables leurs valeurs à la surface du fluide, on a $p = P$, $z = h$, $y = K$ et $n = N =$ la valeur de n lorsqu'on y fait $z = h$; ($N = S\frac{\delta z}{y}$, entre les limites $z = 0$ et $z = h$) on a donc

$$gh + kN\frac{du}{dt} - \tfrac{1}{2}u^2\left(1 - \frac{k^2}{K^2}\right) = 0 \ldots\ldots (4).$$

Tirant de cette équation la valeur de $\frac{du}{dt}$ pour la substituer dans l'équation (3), et désignant par α la hauteur due à la vîtesse u, ce qui donne $u^2 = 2g\alpha$, on a

$$p = P + \frac{g}{N}\left\{hn - zN + \alpha\left[N\left(1 - \frac{k^2}{y^2}\right) - n\left(1 - \frac{k^2}{K^2}\right)\right]\right\}.$$

L'équation (4) devient elle-même, en faisant, pour abréger, $1 - \frac{k^2}{K^2} = M$,

$$h + \frac{kN}{\sqrt{(2g\alpha)}} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = M\alpha \ldots\ldots (5).$$

Les deux équations précédentes serviront à faire connoître la pression exercée en un lieu quelconque de la masse fluide, et la vîtesse de l'écoulement à l'orifice.

329. Tout ce qui vient d'être exposé a lieu, soit que le vase se vide sans recevoir de nouvelle eau, soit que chaque partie de fluide écoulé soit remplacée en AB par une nouvelle couche de fluide ayant même vîtesse que celle

qu'elle remplace. Quand le premier cas a lieu, h est une grandeur variable ; il convient donc d'obtenir des relations entre h et les autres variables.

Les volumes de fluide qui s'écoulent dans le même tems par l'orifice k et par la tranche supérieure K étant égaux, on a $kudt$ ou $k.\sqrt{(2g\alpha)}\,dt = -Kdh$: on met ici le signe $-$, parce que t croît lorsque h décroît. L'équation (7) devient donc

$$Khdh = Nk^2 d\alpha + K\alpha\left(1 - \frac{k^2}{K^2}\right)dh \ldots\ldots (\varphi).$$

K est alors fonction de h. Cette équation s'intègre par les formules connues des équations différentielles linéaires. (Voyez Cal. int. élém. de *Lacroix*, 257 et 265) On obtient donc ainsi la relation entre h et α. On en aura ensuite une entre h et t, en observant que $u = \sqrt{(2g\alpha)} = -\frac{K}{k}.\frac{dh}{dt}$, ce qui donne la loi des abaissemens successifs du fluide.

330. Un des objets qu'on a plus particulièrement en vue dans la théorie qui nous occupe, est le volume de fluide écoulé par l'orifice au bout d'un tems donné. Pour le déterminer, observons que ce volume peut être regardé comme égal à celui d'un prisme qui auroit l'orifice k pour base, et une hauteur ζ variable avec le tems : il s'agit donc de trouver ζ en fonction de t. Pour cela, on a $u^2 = 2g\alpha$, d'où $udu = gd\alpha$ et $udt = d\zeta$. Divisant la seconde de ces équations par la troisième, on a $\frac{du}{dt} = g.\frac{d\alpha}{d\zeta}$. Ce qui change l'expression (4) en

$$hd\zeta + kNd\alpha = Md\zeta \ldots\ldots (\chi).$$

331. Lorsque le fluide est constamment entretenu à la

même hauteur dans le vase, K et M sont constans, et on sépare aisément les variables dans cette équation, dont l'intégrale est

$$\zeta M = Nk\,\{\log(h - M\alpha) + C\};$$

et comme $\alpha = 0$ donne $\zeta = 0$, on trouve $C = -\log.h$; donc

$$M\zeta = Nk.\log\left(1 - \frac{M\alpha}{h}\right), \text{ d'où } \alpha = \frac{h}{M}\left(1 - e^{\frac{M\zeta}{Nk}}\right)$$

e étant le nombre dont le logarithme népérien est $= 1$. Ces expressions donnent en quantités finies, la relation entre la hauteur ζ du prisme de fluide écoulé et la hauteur α due à la vitesse à l'orifice. Si on veut obtenir t en fonction de α, comme $udt = d\zeta = \frac{Nkd\alpha}{M\alpha - h}$ en faisant $\alpha = \chi^2$, on a $u = \chi.\sqrt{(2g)}$, d'où $dt = \frac{2Nk}{\sqrt{(2g)}}.\frac{d\chi}{M\chi^2 - h}$; formule dont l'intégration rentre dans la théorie des fractions rationnelles.

Enfin la relation entre t et ζ se trouve aisément, car on a $d\zeta = udt = dt.\sqrt{(2g\alpha)}$; mettons pour α sa valeur ci-dessus, et, pour faciliter l'intégration, faisons $1 - e^{\frac{M\zeta}{Nk}} = x^2$, ce qui donne

$$\alpha = \frac{h}{M}.x^2,\ \zeta = \frac{Nk}{M}.\log(1 - x^2),\ \text{et } d\zeta = -\frac{2Nk}{M}.\frac{xdx}{1 - x^2}.$$

Donc $dt = -\frac{2Nk}{\sqrt{(2ghM)}}.\frac{dx}{1 - x^2}$: expression dont l'intégration n'offre aucune difficulté. Les constantes se déterminent, dans ces deux derniers cas, en observant que $\zeta = 0$ donne $t = 0$ et $\alpha = 0$.

332. On ne doit pas oublier qu'on a supposé, dans tout

ce qui vient d'être dit, que k est l'orifice inférieur, qui est l'intersection de la surface courbe qui forme la paroi intérieure du vase, par un plan horisontal. S'il n'en étoit pas ainsi, il paroît qu'il se formeroit un vase fictif, et qu'à la partie inférieure il y auroit une portion de fluide stagnant ; mais comme la figure de ce vase est inconnue, il devient absolument impossible de déterminer les circonstances du mouvement.

On voit, d'après cette exposition, que l'hypothèse du parallélisme des tranches détermine, d'une manière assez simple, tout ce qui est relatif à l'écoulement des fluides, par des orifices horisontaux pratiqués aux vases qui les renferment. Cette théorie s'applique aussi au mouvement des fluides dans de longs tuyaux inclinés, quelles que soient leurs sinuosités, pourvu que leur courbure ne varie pas brusquement d'un point à l'autre ; car l'hypothèse sur laquelle est fondée toute notre théorie repose sur la condition spéciale que le fluide a une élévation convenable au-dessus de l'orifice, et que la loi de continuité a lieu dans les parois, afin que la surface du fluide puisse être regardée comme horisontale pendant que l'écoulement a lieu.

II. *De l'écoulement par de petits orifices : Clepsydres.*

333. Si l'orifice k par lequel le fluide s'écoule est très-petit en comparaison d'une section quelconque du vase par un plan horisontal, les quantités que k multiplie pourront être négligées : il est vrai que ces termes ne peuvent être regardés comme nuls que lorsque l'orifice est infiniment petit ; mais il est évident que le résultat auquel on parviendra pourra être regardé comme sensiblement exact. Si donc on applique cette considération à l'équation (r),

les termes relatifs à la forme du vase disparoissent, et elle se réduit à $\alpha = h$: d'où il suit, à cause de $u^2 = 2g\alpha$, que *lorsqu'un fluide incompressible et pesant s'écoule d'un vase par un orifice infiniment petit, il a, à sa sortie du vase, une vitesse égale à celle qui est due à la hauteur de la surface supérieure du fluide, au-dessus de l'orifice.* Cette conséquence est vraie indépendamment de la figure du vase, même lorsque k n'est pas une section de la surface, et aussi lorsque le vase se vide sans recevoir de nouvelle eau.

334. Il résulte de là des conséquences remarquables.

I. On a $u = \sqrt{(2gh)}$; or gh est le poids d'un prisme de fluide qui a l'unité pour base et h pour hauteur, la densité étant $= 1$; ainsi gh est la pression, rapportée à l'unité de surface, qui s'exerceroit à l'orifice supposé bouché ; et cette pression est la seule cause productrice de la vîtesse u, puisque c'est le seul élément susceptible de modification. Or toutes les fois que la hauteur h de la surface supérieure d'un fluide pesant, au-dessus d'une surface infiniment petite, reste la même, la pression de cette surface est aussi la même, quelle que soit son inclinaison (277) donc, puisque cette pression est la seule cause productrice de la vîtesse d'un fluide jaillissant par un orifice infiniment petit, l'effet produit, ou la vîtesse, sera la même lorsque la cause sera la même. Ainsi $\sqrt{(2gh)}$ sera la vîtesse du fluide jaillissant par un orifice infiniment petit sous une hauteur h, quelle que soit l'inclinaison de cet orifice.

II. Les circonstances du mouvement du fluide à la sortie du vase peuvent donc être déterminées d'après ce qu'on a dit page 191, puisqu'il n'est question que de consi-

dérer le mouvement d'un corps lancé dans une direction déterminée, et avec une vîtesse connue.

III. Si donc un fluide s'écoule dans le vide par un orifice vertical, chacune des molécules décrira une branche de parabole à partir du sommet, l'axe de cette courbe sera vertical : son équation se déduira de (*h'*) page 193, en y faisant $\theta = 0$, elle sera $y = -\frac{x^2}{4h}$, h étant la hauteur du fluide dans le vase au-dessus de l'orifice.

IV. On sait (157, V.) qu'un mobile animé de haut en bas d'une vîtesse due à une certaine hauteur doit remonter à la même hauteur : ainsi *un fluide jaillissant verticalement de bas en haut par un petit orifice, doit remonter à la même hauteur à laquelle la surface du fluide est élevée dans le réservoir :* on fait ici abstraction de la résistance de l'air.

335. De ce que la vîtesse d'un fluide qui s'écoule par un orifice infiniment petit, est $u = \sqrt{(2gh)}$, h étant la hauteur du fluide au-dessus de l'orifice, il s'ensuit que si le fluide est entretenu dans le vase à la même hauteur, par une quantité d'eau affluente égale à celle qui s'écoule, il sortira dans chaque unité de tems un prisme de fluide d'un volume $= k\sqrt{(2gh)}$. Ainsi le volume Q qui s'écoulera pendant un tems donné t, sera $kt\sqrt{(2gh)}$, et on aura

$$Q = kt\sqrt{(2gh)} \ldots\ldots (\psi).$$

Nous ferons observer que cette équation renferme quatre quantités, Q, k, t et h, et qu'elle pourra servir à déterminer l'une d'elles d'après la connoissance des trois autres; ainsi de ces quatre choses la grandeur de l'orifice,

le tems de l'écoulement, la hauteur du fluide au-dessus de l'orifice, et le volume écoulé, trois étant données, on pourra toujours trouver l'autre ; on aura pour cela les équations

$$k = \frac{Q}{t\sqrt{(2gh)}},\quad t = \frac{Q}{k\sqrt{(2gh)}},\quad h = \frac{Q^2}{2gk^2t^2}.$$

Par exemple, si le vase est un prisme vertical (percé à son fonds par un orifice très-petit) dont la section horisontale soit K, Kh est le volume du fluide qu'il contient. Si donc on fait $Q = Kh$ dans la seconde de ces formules, on aura le tems que le vase, entretenu constamment plein, emploiera à la dépense d'un volume d'eau égal Kh, c'est-à-dire, égal à celui qu'il contient ; ce tems sera

$$t = \frac{K}{k}\cdot\sqrt{\left(\frac{h}{2g}\right)}.$$

Il suit aussi de l'équation (ψ) que lorsque deux vases sont entretenus constamment pleins, les quantités de liqueur qui s'écoulent dans le même tems sont entr'elles comme les produits des orifices par les racines quarrées des hauteurs. Car on aura pour le second vase $Q' = k't\sqrt{(2gh')}$, en marquant d'un trait les lettres qui se rapportent à ce vase ; il résulte de là $\frac{Q}{Q'} = \frac{k\sqrt{h}}{k'\sqrt{h'}}$. Ainsi connoissant par expérience ce qui est relatif à l'un des écoulemens, on pourra déterminer ce qui a rapport à l'autre.

336. Lorsque l'eau n'est pas constamment entretenue à la même hauteur dans le vase, c'est-à-dire lorsque celle qui s'écoule n'est pas remplacée par de nouvelle eau, la vîtesse à l'orifice diminue graduellement à mesure que le fluide s'abaisse dans le vase. L'eau jaillit donc avec une force de moins en moins grande, et l'amplitude du jet diminue sans cesse.

Si donc K désigne l'aire de la section du vase par un plan

passant par la surface supérieure du fluide au bout du tems t, z la hauteur dont pendant ce tems le fluide s'est abaissé, et h la hauteur du fluide au-dessus de l'orifice au commencement du tems ; $h - z$ sera cette hauteur au bout du tems t, et on aura pour la vîtesse à l'orifice $\sqrt{[2g(h-z)]}$. Cette vîtesse varie d'un instant à l'autre, mais on peut la regarder comme constante pendant le tems dt ; en raisonnant comme ci-dessus, on voit que dans le tems dt il s'écoulera un prisme de fluide qui aura l'orifice k pour base et $\sqrt{[2g(h-z)]}$ pour hauteur. Ainsi le volume du fluide écoulé pendant l'instant dt est $kdt\sqrt{[2g(h-z)]}$. Mais pendant ce tems la surface supérieure du fluide s'est abaissée de dz, et le vase a perdu un cylindre de fluide ayant dz pour hauteur et K pour base, cylindre dont le volume est par conséquent Kdz ; en égalant ces deux valeurs, on en conclut

$$dt = \frac{Kdz}{k\sqrt{[2g(h-z)]}} \quad \ldots\ldots \quad (\omega).$$

Comme l'aire K doit être donnée en fonction de z, par la forme du vase, le second membre de cette équation ne contient que la variable z ; et il sera très-aisé de connoître, par une intégration, les abaissemens successifs du fluide dans un vase de forme connue.

337. Appliquons cette théorie à quelques exemples.

I. Si le vase est un prisme ou un cylindre vertical, l'aire K est constante, puisque, à quelque hauteur qu'on fasse une section horisontale dans le vase, on obtient toujours le cercle générateur du cylindre ou la section horisontale du prisme. Ainsi on a

$$t = \frac{K}{k\sqrt{(2g)}} \cdot \int \frac{dz}{\sqrt{(h-z)}} = -\frac{2K}{k\sqrt{(2g)}}\sqrt{(h-z)} + C.$$

Lorsque le tems t est nul, l'abaissement z de la surface supérieure du fluide est nul : ainsi on a en même tems $z = 0$ et $t = 0$; cette condition détermine la constante C, et donne pour le tems de l'écoulement d'une hauteur z de fluide

$$t = \frac{2K}{k\sqrt{(2g)}}\left[\sqrt{h} - \sqrt{(h-z)}\right].$$

On peut trouver aisément le tems de l'écoulement total ; il ne s'agit pour cela que de faire $z = h$, et on a $t = \frac{K}{k}\cdot\sqrt{\frac{2h}{g}}$. Ce tems est évidemment double de celui qui a été trouvé (335) pour le cas où le vase reste constamment plein.

II. S'il s'agissoit en général d'un solide de révolution, dont l'axe fût vertical, K seroit l'aire d'un cercle qui auroit pour rayon l'ordonnée y de la courbe génératrice ; on auroit donc $K = \varpi y^2$, et l'équation (ω) donneroit

$$t = \frac{\varpi}{k\sqrt{(2g)}}\cdot\int\frac{y^2dz}{\sqrt{(h-z)}}.$$

Il faudroit mettre pour y sa valeur déduite, en fonction de z, de l'équation de la courbe génératrice, et intégrer ; en complettant l'intégrale de manière à avoir en même tems $t = 0$, et $z = 0$, on auroit par là t en fonction de z.

III. Supposons par exemple que la paroi intérieure du vase est une surface courbe, engendrée par la révolution d'une parabole APB, autour de l'axe vertical AC. Soit BC la surface supérieure du fluide quand le tems est nul, et faisons $AC = h$: l'équation est $y^2 = px$, p étant le paramètre, quand l'origine est en A, point où on suppose l'orifice ; donc en transportant l'origine en C, l'équation est $y^2 = p(h-z)$, et en substituant on a Fig. 147.

$$t = -\frac{2\pi\rho}{3k\sqrt{2g}} \cdot (h - z)^{\frac{3}{2}} + C;$$

et déterminant C par la condition que $z = 0$ donne $t = 0$, on a

$$t = \frac{2\rho\pi}{3k\sqrt{2g}} \cdot [h^{\frac{3}{2}} - (h - z)^{\frac{3}{2}}].$$

On aura le tems de l'écoulement total en faisant $h = z$.

338. La théorie que nous venons d'exposer peut servir à marquer sur les parois des vases des divisions propres à mesurer les tems employés dans l'écoulement par les différens abaissemens du fluide. On nomme un pareil système, *Horloge d'eau* ou *Clepsydre*. Ces machines occupent une place intéressante dans l'histoire des sciences et des arts, par l'usage qu'en ont fait les anciens peuples pour la mesure du tems. On en attribue l'invention à Scipion Nasica, qui vivoit environ 200 ans avant Jésus-Christ ; mais il est vraisemblable qu'il en a seulement fait connoître l'usage à Rome : et que les Egyptiens, qui s'en servoient pour mesurer le cours du soleil, les connoissoient à une époque fort antérieure. L'usage des horloges à pendules isochrones tenoit à des notions qui exigeoient le concours des découvertes faites postérieurement dans les sciences et les arts.

La manière dont les anciens ont tiré parti de l'écoulement de l'eau pour sous-diviser la durée des années et des jours est souvent très-ingénieuse. Les idées de l'eau qui s'écoule, et du tems qui fuit, offrent par leur rapprochement des images agréables, et des comparaisons, que la philosophie et la poésie ne pouvoient manquer de saisir. La clepsydre de *Ctesibius* offre un exemple intéressant de la plus ingénieuse imagination. On ne peut se refuser à une secrette et douce mélancolie en voyant l'eau s'échapper, en forme de pleurs, des yeux d'une figure qui semble

payer ce tribut de regrets aux instans qui s'échappent. Cet eau se rend dans un réservoir vertical, où elle élève une autre figure qui tient une baguette au moyen de laquelle, et de son ascension graduelle, elle indique les heures sur une colonne. Le même fluide sert ensuite de moteur dans l'intérieur du piédestal à un mécanisme qui fait faire à la colonne une révolution autour de son axe, dans un an, de telle sorte que le mois et le jour où l'on est se trouvent toujours sous l'index, dont l'extrémité parcourt une verticale divisée convenablement.

339. Il est évident que tout vase peut servir à former une clepsydre; mais la manière la plus commode seroit de se servir d'un vase, dont la forme fut telle que des portions égales de tems fussent mesurées par des divisions égales de l'axe vertical du vase. Si donc on veut que le fluide s'abaisse d'une grandeur donnée a dans chaque unité de tems, comme $\frac{dz}{dt}$ représente l'abaissement du fluide dans cette unité, il suffira de faire $\frac{dz}{dt} = a$, ce qui donnera pour l'équation (ω)

$$aK = k\sqrt{[2g(h - z)]}.$$

Le rapport entre K et z est d'ailleurs arbitraire, c'est-à-dire, qu'on peut disposer de l'aire K répondant à l'abaissement z. Supposons donc, comme cela est convenable, que le vase est symétrique par rapport à l'axe vertical des z, on pourra prendre pour K une fonction arbitraire $f(y)$ d'une ordonnée horisontale, et l'équation $af(y) = k\sqrt{[2g(h - z)]}$ sera celle du profil vertical de la clepsydre.

On pourroit, si on jugeoit à propos, prendre pour les abaissemens du fluide pendant des tems successifs égaux

une fonction du tems ; il faudroit alors faire dans l'équation (ω), $\frac{dz}{dt} = \varphi(t)$; mais ce seroit une généralité inutile pour la pratique.

Si on suppose que l'on veut construire le vase de manière à obtenir des parallélogrammes pour les sections horisontales, en nommant p l'un des côtés et y l'autre, il faudra faire $K = py$, et substituer dans l'équation précédente, on aura

$$y^2 = 2g(h - z)\left(\frac{k}{pa}\right)^2,$$

qui appartient à la parabole ; ainsi le profil vertical du vase sera une parabole dont le sommet est en bas à l'orifice.

De même si on veut que les sections K soient des cercles, il faudra prendre $K = \pi y^2$, ce qui donnera pour l'équation du profil vertical de la clepsydre

$$y^4 = 2g(h - z)\left(\frac{k}{\pi a}\right)^2.$$

540. Il y a quelques corrections à faire aux développemens qui viennent d'être donnés. Dans l'état physique des choses lorsque la surface du fluide approche de l'orifice, il se forme au-dessus de cet orifice une espèce d'entonnoir dans lequel l'air s'introduit, ce qui empêche en partie le fluide de sortir et change la nature de l'écoulement. Ce que nous venons de dire n'a donc lieu que jusqu'au moment où l'entonnoir commence à se former ; et cela arrive, pour l'ordinaire, lorsque la surface du fluide est à un décimètre de l'orifice.

De plus on a reconnu, par expérience, que lorsqu'un fluide incompressible s'échappe d'un vase par une ouverture, que je supposerai circulaire, le jet n'avoit pas une forme cylindrique et diminuoit progressivement de dia-

mètre depuis l'orifice jusqu'à une certaine distance, peu différente, dans beaucoup de cas, du demi-diamètre de cet orifice. Ainsi le jet affecte, dans cet intervalle, la forme d'un cône tronqué dont la grande base est l'orifice même. Or, pour évaluer la dépense, il faut à cet orifice substituer la petite base du cône tronqué qui renferme tous les filets fluides jaillissans hors du vase, lorsqu'on connoît ou la vitesse commune ou la vitesse moyenne de ces filets. La diminution du diamètre du jet, depuis l'orifice jusqu'à une certaine distance de cet orifice, est ce qu'on a appelé *la contraction de la veine fluide.*

L'expérience a appris que, lorsque l'eau s'écouloit d'un vase par un petit orifice percé dans une mince paroi, la dépense effective étoit à-peu-près 0,62 de la dépense théorique calculée par la formule du n°. 335. Ce déchet est occasionné par la contraction de la veine fluide, et il demeure le même lorsqu'on adapte à l'orifice un ajutage dont la longueur est égale à la distance de cet orifice à la section de la plus grande contraction, et dont la paroi intérieure a la forme conoïde affectée dans cet intervalle par le fluide. Mais si à la suite de cet ajutage on place un tuyau cylindrique d'un diamètre égal à celui de l'orifice, supposé circulaire, ou un tuyau conique, ou enfin un tuyau en partie cylindrique et en partie conique, les longueurs et l'évasement n'excédant pas certaines limites, la dépense dans un tems donné augmente, et peut excéder le double de celle qui se fait par une mince paroi. Cette augmentation de dépense varie avec les proportions des ajutages qui comportent un *maximum* et un *minimum;* cependant les connoissances sur cette matière ne sont pas assez avancées, pour établir ces proportions et la forme rigoureuse des ajutages, d'après des règles susceptibles d'être mises en formule.

Enfin la différence entre la dépense par un orifice percé dans une mince paroi, et celle par un tuyau additionnel, n'a pas lieu dans le vide. On voit, par ces divers phénomènes, que le poids de l'atmosphère a une influence totale ou presque totale sur l'excès de produit des tuyaux additionnels. Consultez le Mémoire de *Prony*, sur le *jaugeage des eaux courantes*.

Nous terminerons ici cette exposition bien imparfaite sans doute, mais qu'il ne nous appartient pas de traiter plus en détail. Ce seroit sortir de notre sujet que de parler de ce que *Venturi*, habile physicien de Modène, a appelé la communication latérale du mouvement dans les fluides,

Fin de l'Hydrodynamique.

NOTES

SUR QUELQUES THÉORIES IMPORTANTES.

I. *Composition des forces.*

La plupart des auteurs qui ont écrit sur la Statique, ont commencé par traiter les forces parallèles; ensuite ils en ont déduit le parallélogramme des forces. On peut consulter notre préface pour connoître les motifs qui nous ont déterminés à ne pas suivre cette marche : on y verra qu'elle auroit été moins méthodique que celle que nous avons suivie, et dissemblable en ce point avec celle de l'ouvrage entier. Mais cette dernière offre dans l'enseignement des inconvéniens, et on ne peut se dissimuler que l'autre a du moins l'avantage d'être beaucoup plus courte; et par conséquent précieuse pour les examens. C'est dans ce but que je vais ici donner une démonstration de la composition de deux forces en suivant ces principes : depuis plusieurs années je m'en suis servi avec avantage pour l'instruction de jeunes gens que j'ai formés pour l'Ecole polytechnique, et c'est même dans cette intention que je l'ai consignée dans la précédente édition n°s. 31 et 32. Je vais donner en outre l'ordre à suivre pour incorporer cette démonstration dans l'ouvrage, et la lier au reste de la Statique sans qu'il en résulte de lacune.

On prendra d'abord le texte de l'ouvrage jusqu'au parallélogramme des forces, page 9 : en passant, si l'on veut, les n°s. 13 et 14. Après on prendra les démonstrations suivantes.

1°. *Composition de deux forces parallèles.*

Fig. 18. Soient p et q deux forces parallèles appliquées aux extrémités E et F de la ligne EF, avec laquelle leurs directions font d'ailleurs un angle quelconque; je dis que *leur résultante* R *est égale à leur somme, leur est parallèle, et que le point* O *d'application divise la droite* EF *en parties réciproquement proportionnelles aux composantes :* c'est-à-dire qu'on a

$$R = p + q, \text{ et } p \times EO = q \times OF \text{ ou } \frac{p}{q} = \frac{OF}{OE}.$$

En effet ajoutons au système deux autres forces p' et q' quelconques égales et opposées : comme elles se détruisent, il est clair que tout est dans le même état qu'avant. Or les deux forces p et p' ont une résultante P, dont la direction EP et la grandeur sont inconnues, mais qui pourtant est visiblement dirigée dans l'angle $p'Ep$: de même q et q' équivalent aussi à une force inconnue Q, dirigée suivant FQ. Ainsi les quatre forces p, p', q et q', équivalent à P et Q, dont il s'agit de trouver la résultante, et dont les directions prolongées doivent nécessairement concourir en A. Supposons ces forces appliquées en ce point, par lequel nous menons BC parallèle à EF et AR parallèle à pE. Décomposons la force P en deux autres dirigées suivant AB et AO. Il est clair que les circonstances de cette décomposition sont, en sens inverse, les mêmes que celles de la composition de p et p' appliquées en E : on aura donc suivant AB une force égale à p', et suivant AO une force égale à p, pour les composantes de P. Pareillement on décomposera la force Q en deux

autres, l'une suivant AC et égale à q'; l'autre suivant AO et égale à q. Les deux puissances dirigées suivant AB et AC étant égales et opposées, se détruisent : les deux autres au contraire, dirigées suivant AO, équivalent à une seule égale à leur somme : donc la résultante cherchée R est appliquée en un point O entre E et F, est parallèle aux composantes et égale à leur somme.

Il s'agit maintenant de déterminer la position du point O: supposons d'abord les forces p et q égales entr'elles et à p' et q'; il s'ensuit qu'alors la force P divise (12) en deux parties égales l'angle $p'Ep$. Ainsi le triangle AEO est isocèle, car les angles en A et E sont égaux : donc $AO = EO$. On prouveroit de même que $AO = OF$. Ainsi lorsque $p = q$, le point O est au milieu de la ligne EF.

On conclut de là que réciproquement on peut substituer à la force R deux autres forces p et q égales entr'elles et parallèles, pourvu qu'on ait $EO = OF$, et $R = p + q$. De même aussi on peut décomposer celles-ci en d'autres; d'où il suit qu'on peut substituer à une force R tant d'autres forces égales et parallèles $p, q, r, s, \ldots$ qu'on voudra, pourvu qu'on ait $R = p + q + r + s \ldots$ et que leurs points d'application soient deux à deux à égale distance de celui de la force R.

Cherchons maintenant le point d'application de deux forces parallèles inégales P et Q; et supposons d'abord ces forces commensurables, c'est-à-dire, qu'une certaine force α soit contenue dans P et Q des nombres de fois entiers m et n; ou qu'on ait Fig. 19.

$$P = m\alpha \text{ et } Q = n\alpha.$$

Partageons la droite EG au point K en parties dans le

rapport de m à n, c'est-à-dire, telles qu'on ait $\frac{EK}{KG} = \frac{m}{n}$, et prolongeons-la de part et d'autre, de $AE = EK$ et $GB = KG$. Partageons AK en m, et BK en n parties égales : il se trouvera par là que la droite AB aura été divisée en $m + n$ parties égales ; car on a $\frac{2EK}{2KG}$ ou $\frac{AK}{BK} = \frac{m}{n}$, ou $\frac{AK}{m} = \frac{BK}{n}$; ce qui fait voir que la m^e. partie de AK est égale à la n^e. de BK.

Cela posé, appliquons à chacun des $m - 1$ points de division de AK une force $= \alpha$, puis en A et K une force $= \frac{1}{2}\alpha$: elles équivaudront visiblement à la puissance P. Décomposons de même Q en $n - 1$ forces $= \alpha$, appliquées aux points de division de KB, et deux autres forces $= \frac{1}{2}\alpha$ appliquées en K et B. Par là P et Q seront remplacés par $m + n - 1$ forces α appliquées aux points de division de AB, et deux forces $= \frac{1}{2}\alpha$ appliquées en A et B. La résultante de toutes ces forces, qui est celle de P et Q, leur sera parallèle et sera égale à leur somme, ce qui confirme ce qu'on a déja vu : mais de plus elle passera par le point F milieu de AB. Or $AF = EG$ puisque ces deux longueurs sont la moitié de AB : soustrayant d'un membre AE et de l'autre son égal EK ; il reste $EF = KG$: en ôtant de part et d'autre FK, on a donc aussi $EK = FG$; ce qui change la formule

$$\frac{EK}{KG} = \frac{m}{n} = \frac{P}{Q}, \text{ en } \frac{FG}{EF} = \frac{P}{Q}.$$

Fig. 19. Démontrons que la même proposition a lieu lorsque les forces P et Q sont incommensurables : alors si on suppose que P contienne la force α un nombre exact de fois, et que $P = m\alpha$ (ce qui est toujours permis), on voit que Q n'est plus un multiple de α, et qu'on a $Q = n\alpha + \alpha'$:

en observant que comme $\alpha' < \alpha$, on peut prendre α' aussi petit qu'on veut. Soit donc

$$P = m\alpha, \text{ et } Q = n\alpha + \alpha'.$$

Cela posé, marquons sur EG un point F, tel qu'on ait $\frac{P}{Q} = \frac{FG}{EF}$; je dis que le point F sera sur la direction de leur résultante R. Car soit, s'il est possible, un autre point K pour celui où elle est appliquée. En ne considérant que la partie $n\alpha$ de la force Q, et la composant avec $P = m\alpha$, le point d'application I de leur résultante R' sera tel qu'on ait $\frac{m}{n} = \frac{GI}{EI}$, d'après ce qu'on vient de voir. Or on observe que le point I tombe entre K et F. Car 1°. on a $\frac{m}{n}$ ou $\frac{m\alpha}{n\alpha} > \frac{P}{Q}$; donc $\frac{GI}{EI} > \frac{FG}{EF}$; et comme la somme des deux termes de ces fractions est $= EG$, on en conclut que $GI > FG$. 2°. I tombe aussi près qu'on veut de K, puisque α' est d'une petitesse arbitraire.

Il reste maintenant à composer la force R' avec celle α' qui est appliquée en G pour avoir la résultante de P et Q. Or il suit de ce qui a été démontré que le point d'application ne peut être situé hors de GI; il étoit donc absurde de le supposer en K.

On prouveroit que la résultante R de P et Q ne peut être placée de l'autre côté du point F; en représentant Q par $n\alpha - \alpha'$, et raisonnant de même. Donc, etc.

Il faut faire succéder à ces démonstrations les n°s. 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37 et 38; puis après continuer ce qui suit.

2°. *Composition des forces dont les directions forment un angle quelconque.*

Fig. 148. Le premier cas qui se présente est celui où l'angle formé par les directions des forces est droit. Soient donc deux forces perpendiculaires P et Q; soit R leur résultante inconnue. Menons à AR les perpendiculaires BC, et EF (le point E étant quelconque) et les parallèles Ep et Fq. Si on décompose la force P en deux autres p' et p agissant suivant AB et AO, de même la force Q en deux autres q' et q agissant suivant AC et AO : il suit de ce que AO est la résultante, que les forces p' et q' qui agissent en sens contraire suivant la ligne BC, sont égales. Or si on suppose les puissances P et Q appliquées en E et F, et qu'on les décompose suivant Ep', Ep, Fq' et Fq, les composantes seront visiblement les mêmes : ainsi on a encore $p' = q'$; et la résultante R sera la même que celle des forces parallèles p et q. Donc le point O divise la droite en parties réciproquement proportionnelles à p et q : et on a

$$R = p + q, \text{ et } \frac{p}{q} = \frac{OF}{OE}.$$

Cela posé, observons que les composantes P et Q forment les mêmes angles avec leur résultante R, que P forme avec p et p', et que Q fait avec q' et q. On a donc (16) $\frac{R}{P} = \frac{P}{p}$, d'où $pR = P^2$.

On auroit de même . . . . $qR = Q^2$.

Ajoutant ces équations on trouve . . . . $R^2 = P^2 + Q^2$.

Leur quotient donne . . . . . $\frac{p}{q} = \frac{P^2}{Q^2} = \frac{OF}{OE}$.

Or en nommant α l'angle OAF, les triangles rectangles AOE et AOF donnent $OE = AO \cot \alpha$, et $OF = AO \tang \alpha$; on a donc

$$\frac{P^2}{Q^2} = \frac{\tang \alpha}{\cot \alpha} = \tang^2 \alpha; \text{ d'où } P = Q \tang \alpha.$$

Ces équations servent à déterminer la grandeur et la direction de la résultante R. En effet si on forme un triangle rectangle AHK qui ait pour ses côtés de l'angle droit $AH = Q$ et $HK = P$; la dernière indique que α est l'angle que l'hypothénuse fera avec le côté Q. La première fait voir que la longueur AK de l'hypothénuse sera R. Il suit visiblement de là que la résultante cherchée est la diagonale AK du parallélogramme $ALKH$.

Lorsque les forces forment un angle quelconque, on prendra l'article 18, 2°., page 13.

Ensuite on continuera les articles 19, 20, 21 ... et ainsi de suite, jusqu'à l'article IV, (page 26) qu'on omettra parce que les objets qui y sont traités sont déja supposés connus.

II. *Equations du mouvement.*

Le calcul infinitésimal repose sur des considérations délicates; et quoiqu'il ait l'avantage d'être plus facile à exposer et plus simple dans ses procédés, on ne peut se dissimuler qu'il n'a pas la rigueur géométrique qu'on a droit de desirer. Il est vrai que ce calcul est mis hors de doute par la méthode des limites et par celle des seconds termes que *La Grange* a si élégamment développée dans ses *fonctions analytiques*. Néanmoins l'usage continuel qu'on fait en Dynamique des équations du mouvement,

démontrées (148) à l'aide du calcul infinitésimal, rend presque nécessaire une démonstration plus rigoureuse et qui les mette dans un plus grand degré d'évidence ; c'est ce que nous nous proposons ici.

Soit $e = ft$ l'équation du mouvement d'un point mobile sollicité par des forces quelconques dirigées suivant la même droite : au bout des tems t et $t + \tau$, les distances de ce point à l'origine des e sont ft et $f(t+\tau)$; la différence entre ces deux espaces est l'espace décrit durant le tems τ, qui succède au tems t : cet espace est

$$f(t+\tau) - ft = \tau . f't + \tfrac{1}{2}\tau^2 . f''t + \text{etc.}\ldots. \quad (1).$$

En représentant par $f't, f''t, \ldots$ les coefficiens différentiels des divers ordres, suivant la notation de La Grange. Considérons maintenant un tems τ compté avant l'expiration du tems t : l'espace parcouru pendant ce second intervalle, égal au premier, est visiblement

$$ft - f(t-\tau) = \tau . f't - \tfrac{1}{2}\tau^2 . f''t + \text{etc.}\ldots. \quad (2).$$

Or si les forces viennent tout-à-coup à cesser d'agir au bout du tems t, le mouvement devient uniforme, et le mobile, étant supposé avoir la vîtesse inconnue v, doit décrire, durant le tems τ qui succède au tems t, l'espace $v\tau$. Supposons que le mouvement varié dont il s'agit étoit accéléré durant les deux tems τ que nous venons de considérer ; il est clair (148) que, quelque courte que soit leur durée, $v\tau$ devra être plus petit que la valeur (1) et plus grand que celle (2). Le contraire auroit lieu si le mouvement étoit retardé. Ainsi $v\tau$ est compris entre ces deux développemens, pourvu qu'on attribue à τ une valeur assez petite pour que le mouvement soit continuellement accéléré ou retardé durant ce tems, ce qui est toujours possible. Il résulte de là que v est toujours compris entre

$f't + \frac{1}{2}\tau.f''t +$ etc. et $f't - \frac{1}{2}\tau.f''t +$ etc.

Mais plus τ est petit plus ces deux développemens approchent de la valeur de leur premier terme $f't$, sans toutefois cesser de comprendre entr'eux la valeur de v; donc on a $v = f't$. Ce qui est conforme à ce qu'on a vu (149).

Cette démonstration devient réellement indispensable lorsqu'on considère que l'ignorance absolue où nous sommes de la manière dont les forces continues agissent, ne nous permet pas de supposer en toute rigueur, ainsi que nous l'avions fait (148), que leurs actions successives sont séparées entr'elles par des intervalles de tems très-courts et égaux. Or ce qui vient d'être démontré, légitime cette hypothèse, en tant qu'on n'a égard qu'au résultat de calcul auquel elle conduit.

Faisons pour la force accélératrice un raisonnement analogue. Soit $v = Ft$ la valeur de la vîtesse au bout du tems t, d'un mobile animé d'un mouvement varié quelconque. Si on conçoit, comme ci-dessus, deux tems égaux représentés par τ, dont l'un expire avec le tems t, et dont l'autre succède à ce tems; il est aisé de voir qu'au commencement du premier la vîtesse sera $F(t-\tau)$, et que pendant cet intervalle, elle recevra l'accroissement

$$Ft - F(t-\tau) = \tau.F't - \tfrac{1}{2}\tau^2.F''t + \text{etc.}\ldots. \quad (1).$$

Pareillement la vîtesse acquise pendant le second tems τ sera

$$F(t+\tau) - Ft = \tau.F't + \tfrac{1}{2}\tau^2.F''t + \text{etc.}\ldots. \quad (2).$$

Or si la force cesse de varier au bout du tems t, l'accroissement de vîtesse pendant le tems τ qui suit sera $\varphi\tau$, φ désignant la force accélératrice constante qui aura lieu alors, et dont on cherche la valeur : cela résulte de ce qu'on a dit (151). Or il est clair que φt sera plus grand

que la valeur (1) et plus petit que celle (2), si dans le double intervalle que nous venons de considérer, le mouvement est continuellement accéléré; tandis que s'il est retardé, le contraire aura lieu. Donc $\varphi\tau$ est compris entre ces deux développemens, pourvu qu'on prenne τ suffisamment petit; ce qui est toujours possible. Donc φ est compris entre

$$F't - \tfrac{1}{2}\tau . F''t + \text{etc.}, \text{ et } F't + \tfrac{1}{2}\tau . F''t + \text{etc.}$$

Or plus τ est petit plus ces deux développemens approchent de la valeur de leur premier terme $F't$, sans que néanmoins φ cesse d'être compris entr'eux : donc $\varphi = F't$; résultat qu'il s'agissoit d'obtenir.

III. *Sur quelques valeurs numériques employées en Mécanique.*

On fait fréquemment usage, dans les problèmes de Mécanique, des valeurs numériques de certaines constantes; nous allons les réunir ici avec le plus grand degré d'approximation. Nous désignerons par le signe log., ainsi qu'on l'a fait précédemment, les *logarithmes hyperboliques*, que Lacroix a nommés avec plus de raison *logarithmes Népériens*; et par *L* les logarithmes des tables ordinaires, qu'on nomme aussi *logarithmes de Briggs*, et dans lesquels la base est 10.

1°. Le nombre qui est la base des logarithmes népériens est

$$e = 2{,}71828\ 18284\ 59045\ 23536.$$

Comme les formules ordinairement employées en algèbre renferment les logarithmes népériens, parce qu'ils sont d'un usage plus commode dans le calcul intégral; et

comme il n'y a que des tables peu étendues construites pour ce système, on doit se rappeler que pour convertir les logarithmes hyperboliques en logarithmes tabulaires, il suffit de multiplier ceux-là (Compl. d'alg. de Lacroix, n°. 92) par

$$M = Le = 0{,}43429\ 44819\ 03251\ 82765\ 11289.$$

C'est ce nombre qu'on nomme le *Module*; et on a

$$LM = 0{,}63778\ 43113 - 1.$$

Ainsi lorsqu'une formule contient $\log.a$; pour employer les tables de Briggs, il faut la préparer et remplacer $\log.a$ par $\frac{M.\log.a}{M} = \frac{La}{M}$. De même aussi lorsqu'on veut ramener les logarithmes de Briggs aux logarithmes népériens, il faut multiplier les premiers par

$$f = 2{,}30258\ 50929\ 94045\ 68401\ 79914:$$

de sorte que $La = \frac{f.La}{f} = \frac{\log.a}{f}$. On a d'ailleurs

$$Lf = 0{,}36221\ 56886.$$

2°. On a pour le *rapport du diamètre à la circonférence* ou la demi-circonférence du cercle qui a l'unité pour rayon

$$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279,$$
$$L\pi = 0{,}49714\ 98726\ 94113\ 85435\ 127,$$
$$\log \pi = 1{,}14472\ 98858\ 49400\ 17414\ 342.$$

3°. En désignant par g la GRAVITÉ, et par r la longueur du PENDULE simple qui, à Paris, bat les secondes dans le vide, on a

$g = 9^m,80879\ 5248$
$Lg = 0\ ,99161\ 56690$
$r = 0^m,99583\ 87446$
$Lr = 0\ ,99731\ 59236 - 1$

Dans l'ancienne division du tems, où la seconde est la 86400e. partie du jour moyen.

(Voyez le Mémoire de PRONY, sur le *jeaugeage des eaux courantes*, page 63).

$g = 7^m,32214$
$Lg = 0\ ,8646381$
$r = 0^m,741887$
$Lr = 0\ ,8703378 - 1$

Dans la nouvelle division du tems, où la seconde est la 100000e. partie du jour moyen.

(*Exposition du système du monde*, page 146).

IV. *Sur la Résistance de l'Air.*

Nous avons dit (50) que dans le vide l'or et la plume la plus légère mettent le même tems à descendre de hauteurs égales en vertu de la gravité; et que la *résistance de l'air* étoit la cause qui empêchoit les choses de se passer ainsi. Il est facile de concevoir pourquoi les corps qui ont plus de masse tombent avec plus de rapidité que les autres. Supposons, par exemple, deux balles de même diamètre, l'une de plomb, l'autre de liége, qui commencent à tomber en même tems; ces deux balles présentant des surfaces égales à la résistance de l'air, on aura ainsi deux résistances égales, que je représenterai par α, et qui sont appliquées à des corps animés de la même vîtesse initiale. Cette vîtesse étant désignée par V, on aura MV pour la quantité de mouvement de la balle de plomb, et $M'V$ pour celle de liége; M et M' sont les masses respectives de ces balles. On voit que la résistance de l'air diminuera ces forces de la quantité α; de sorte qu'elles deviendront

$MV - a$ et $M'V - a$. En divisant (217) ces quantités de mouvement par les masses sur lesquelles elles agissent, on a $v = \frac{MV - a}{M} = V - \frac{a}{M}$ pour la vîtesse de la balle de plomb : de même $v' = V - \frac{a}{M'}$ est celle de la balle de liége ; d'où il suit que l'on a $v' < v$, puisque $M' < M$. Le phénomène de la résistance de l'air se répétant à chaque instant, à chaque instant aussi la vîtesse des corps dont la masse est la plus grande se trouvera moins diminuée : d'où on voit enfin qu'ils auront une chute plus rapide.

Il est aisé de se rendre raison des causes qui rendent la résistance des fluides sensiblement *proportionnelle au quarré de la vîtesse*. En effet cette résistance ne provient que de l'inertie des fluides (219, 2°.), qui ne peuvent céder à l'impulsion des corps qui s'y meuvent et se déplacer pour leur ouvrir un passage sans détruire une partie de leur vîtesse : de là vient que plus un fluide a de densité, plus sa résistance est grande. Soit A une surface plane exposée au choc direct d'un fluide, ou mue elle-même dans ce fluide suivant une direction perpendiculaire avec la vîtesse v. Elle parcourra l'espace vdt dans l'instant dt, et par conséquent aura déplacé un volume $Avdt$ de fluide. Soit donc appelé D la densité de ce fluide, nous aurons $ADvdt$ pour exprimer la masse qui aura été mise en mouvement dans l'instant dt, et qui aura par conséquent reçu la quantité de mouvement ADv^2dt : or on sait que par là l'impulsion produit (219, 2°.) dans le fluide une résistance égale à la quantité de mouvement communiqué. Soit donc M la masse du corps qui présente la surface A au choc direct du fluide, dv la diminution instantanée de vîtesse causée par la résistance du fluide, on a $Mdv = ADv^2dt$;

d'où on voit que la force que cette résistance oppose est $\frac{dv}{dt} = \frac{AD}{M} v^2 = R$.

Lorsque la surface A se présente obliquement au choc du fluide, la résistance, qui est toujours perpendiculaire à cette surface, n'est plus mesurée par cette valeur : on décompose la vîtesse oblique v en deux autres ; l'une normale à la surface, et l'autre dirigée dans le sens de cette surface. La dernière ne produit aucune résistance; l'autre a pour valeur $v \sin \alpha$, α étant l'angle que forme la direction de la vîtesse avec celle de la surface. On remplace donc v par $v \sin \alpha$ dans la valeur précédente, ce qui donne pour la résistance $DAv^2 \sin^2 \alpha$.

Lorsqu'on considère le mouvement dans un fluide élastique, il faut doubler ces valeurs de la résistance ; car u', n°. 225, est double de v (c'', 218).

Ramenons la première de ces valeurs à des mesures connues. Soit h la hauteur due à la vîtesse v, on a $v^2 = 2gh$, où $R = \frac{2ADgh}{M}$. Or $2Ah$ est le volume d'un prisme qui a A pour base et $2h$ pour hauteur ; $2DAh$ est donc la masse d'un prisme de fluide qui a la surface pressée pour base et pour hauteur le double de celle qui est due à la vîtesse v : $2DAgh$ est le poids P de ce prisme ; de sorte que $R = \frac{P}{M}$.

Les auteurs qui ont traité de la résistance des fluides ne s'accordent entr'eux que sur la proportionnalité au quarré des vîtesses : mais ils diffèrent sur la valeur absolue de cette résistance. Newton reconnut que la résistance ne devoit être que la moitié de ce que donne l'expression précédente ; il a trouvé (Principes de math., livre II, sect. VII)

$$R = \tfrac{3}{8} \cdot \frac{D}{D'} \cdot \frac{v^2}{a}.$$

D' est la densité d'un globe qui est mu dans le fluide, a est le diamètre de ce globe. Cette valeur est assez d'accord avec celle que l'expérience donne, dans le cas où les vitesses ne sont pas très-considérables : mais lorsqu'il s'agit des globes métalliques lancés par les bouches à feu, il faut substituer 0,45 à $\frac{3}{8}$ dans la formule précédente : c'est du moins ce que l'expérience paroît confirmer. La théorie précédente n'est pas d'accord avec l'expérience ; cela tient à la nature même des fluides qui ne nous est pas connue, ce qui rend les circonstances du choc différentes de ce que nous les avons supposées. Il suit de cela que si le corps que nous avons considéré en mouvement (162 et 173) est une sphère, dont le diamètre seroit a, il faut remplacer les coefficiens m et $\frac{1}{2}A$, par $\frac{3}{8} \cdot \frac{D}{D'a}$, ou par $(0,45) \times \frac{D}{D'a}$, suivant que le mouvement est lent ou très-rapide : $\frac{D'}{D}$ est le rapport entre les pesanteurs spécifiques du mobile et du fluide.

V. *Cordes vibrantes.*

Le problême que nous allons traiter a fait le sujet des recherches des plus profonds analystes ; Euler, La Grange, d'Alembert, et D. Bernoulli l'ont traité tour-à-tour, et leurs écrits ne laissent rien à desirer sur cette matière. Voici en quoi consiste ce problême.

Une corde AB *étant tendue et fixée en ses deux extrémités, si on la contraint de prendre une forme quel-* Fig. 149.

accélératrice (152) est $\frac{d^2y}{dt^2}$, ou plutôt $-\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)$, par la même raison que ci-dessus ; donc en faisant, pour simplifier, la constante $\frac{agF}{P} = b^2$, on obtient

$$b^2 \times \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) \ldots\ldots (1).$$

Cette équation aux différences partielles, est celle du mouvement d'un point quelconque de la corde. Pour l'intégrer observons que comme $y = f(x, t)$ on a $dy = pdx + qdt$, $dp = rdx + sdt$, $dq = r'dx + s'dt$; p, q, r, r', s, s' étant des coefficiens de différences partielles. Or $s = \left(\frac{dp}{dt}\right)$ et $r' = \left(\frac{dq}{dx}\right)$; donc $s = r'$. De même $s' = \left(\frac{dq}{dt}\right) = \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)$; donc, pour l'équation (1), on a $s' = b^2 . \frac{dp}{dx} = b^2 r$: ainsi

$$dp = rdx + sdt \text{ et } dq = sdx + b^2 rdt.$$

Multipliant la première de ces équations par b, et ajoutant la seconde, ou la soustrayant, on a la double expression

$$bdp \pm dq = (br \pm s)(dx \pm bdt).$$

Comme les premiers membres sont des différentielles exactes, il faut que les seconds le soient aussi ; donc $br + s = f''(x + bt)$ et $br - s = F''(x - bt)$ en employant la notation de La Grange. Ainsi on a

$$bp + q = \int \{ f''(x + bt) \times (dx + bdt) \} = f'(x + bt)$$
$$bp - q = \int \{ F''(x - bt) \times (dx - bdt) \} = F'(x - bt).$$

Ajoutant et soustrayant on en tire les valeurs de p et

de q, qui, substituées dans $dy = pdx + qdt$, donnent

$$2b\,dy = f'(x+bt)(dx+bdt) + F'(x-bt)(dx-bdt);$$

d'où on conclut en intégrant

$$y = \frac{1}{2b}\left\{f(x+bt) + F(x-bt)\right\}.$$

Expression qui renferme deux fonctions arbitraires f et F, et qui en faisant abstraction du diviseur b à cause de la généralité de ces fonctions, peut s'écrire

$$y = \frac{1}{2}\left\{f(x+bt) + F(x-bt)\right\} \quad \ldots\ldots (2).$$

Ainsi non-seulement cette équation satisfait à l'équation (1), mais elle en est même l'intégrale complette, à cause des deux fonctions arbitraires qu'elle renferme.

Appliquons maintenant cette intégrale à la corde vi- Fig. 149.
brante. Puisque les deux points A et B sont fixes, il faut que y soit nul quand $x = 0$, ou quand $x = a$, quel que soit le tems. Or $x = 0$ et $y = 0$ donnent $fbt = -F(-bt)$; ainsi les deux fonctions f et F ont entr'elles cette relation $fz = -F(-z)$ qui sert à déterminer la nature de l'une de ces fonctions. Car si on construit les courbes qui ont pour équations $\epsilon = fz$, et $\epsilon = -F(-z)$, on vient de voir qu'en prenant de part et d'autre de l'origine des abscisses z égales, les ordonnées ϵ et ϵ doivent être aussi égales et de signes contraires; donc ces deux courbes ont des branches symétriques qui tombent des deux côtés de l'axe; ainsi la fonction fz ne contient que des puissances impaires de z, et on voit que les fonctions f et F sont les mêmes: de sorte que $fz = -f(-z)$ et $f(x-bt) = F(x-bt)$; enfin l'équation (2) devient

$$y = \frac{1}{2}\left\{f(x+bt) + f(x-bt)\right\} \quad \ldots\ldots (3).$$

L'égalité des fonctions f et F est encore plus visible, en observant que l'équation (2) donne pour $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ une valeur qui est celle de la vîtesse d'un point quelconque : or cette valeur devant être nulle quand $t = 0$ donne $f'x = F'x$ et par conséquent $fx = Fx$. Ainsi la vîtesse est en général

$$\frac{dy}{dt} = \frac{b}{2}\left\{f'(x+bt) - f'(x-bt)\right\} \ldots\ldots (4).$$

Il est facile maintenant de trouver la forme de la courbe au bout du tems t : en effet $t = 0$ donne $y = fx$, or alors $y = \zeta$, donc la fonction f est donnée par la figure initiale de la courbe. Ainsi lorsque l'équation de cette figure sera connue on y changera successivement x en $x + bt$, et en $x - bt$: la moitié de la somme des deux résultats sera la valeur de y. D'après cela on tracera la courbe initiale AMB, qui a pour équation $\zeta = fx$ Fig. 150. A étant l'origine ; $f(x + bt)$ et $f(x - bt)$ sont les coordonnées de cette courbe, pour les points dont les abscisses sont $x + bt$ et $x - bt$. On prendra donc $AP = x$, $PQ = bt = Pq$; on aura $QN = f(x + bt)$ et $qn = f(x - bt)$: la moitié de la somme des deux coordonnées QN et qn, est, au bout du tems $t = \frac{PQ}{b}$, la longueur de l'ordonnée $Pm = y$ du point M de la courbe. En conservant la même valeur de t, et changeant l'abscisse, on trouvera successivement les divers points de la courbe AmB. Si au contraire on conserve la même valeur de x et si on fait varier le tems, on obtient par cette construction les positions du point M dans tous les instans successifs.

Mais si on a $bt > x$, (comme cela a lieu pour les points

voisins de A et de B) la construction précédente paroît être en défaut. Soit par exemple $bt = PQ'$; pour trouver la position du point M au bout du tems $t = \frac{PQ'}{b}$, il faut prendre $PQ' = Pq' = bt$; on aura $Q'N' = f(x + bt)$; mais le point q' tombe alors en-deçà de A, et on ne peut avoir $f(x - bt)$. Pour vaincre cette difficulté, on construira la courbe $an'A$ telle que pour des abscisses Aq' et Aq égales, les ordonnées $q'n'$ et qn soient égales, mais disposées en sens opposés; alors la courbe $an'A$ sera la même que AMB doublement renversée, c'est-à-dire renversée de droite à gauche et de bas en haut. Les parties semblables seront contigues en A. On fera la même construction à l'infini, ainsi que la fig. 150 le fait d'ailleurs voir mieux qu'une explication plus détaillée ne le feroit.

Il suit de là qu'on a $Aq' = bt - x$; mais $qn = f(Aq) = f(x - bt)$, et comme $q'n' = qn$, on a donc $q'n' = f(x - bt)$, Donc l'ordonnée cherchée, correspondante à l'abscisse AP, au bout du tems $t = \frac{PQ'}{b}$, est $y = \frac{1}{2}(q'n' + Q'N')$.

Ainsi en vertu du prolongement de la courbe, dont nous venons de donner la construction, il est clair que le procédé indiqué ci-dessus a encore lieu; et on voit même qu'il n'exige pas que la courbe initiale soit exprimée par une équation, et qu'elle peut même être tracée mécaniquement.

Si on a quelque peine à concevoir le prolongement de la courbe initiale, il est facile de lever tous les doutes. La corde n'est supposée terminée en A et B qu'autant que ces points demeurent immobiles tout le tems du mouvement. Or quand bien même la corde seroit prolongée au-delà, et en-deçà des points A et B, il est évident qu'on ne changeroit rien à l'état de la question si on don-

roit à cette corde la même tension, et une figure initiale telle que les points A et B restassent fixes ; or c'est ce qui arriveroit infailliblement, si, en faisant .... $AB = aA = Bb =$ etc. $= a$, on prend pour figure initiale la corde ... $an'AMBtb$ ... construite comme il a été dit ci-dessus. Ainsi le prolongement est non-seulement permis, mais même l'analyse fait voir qu'il est inhérent à la théorie.

Nous avons supposé dans notre figure que la courbe AmB étoit celle qui avoit lieu au bout du tems $t = \frac{PQ}{b}$. Mais si on vouloit connoître la forme de la courbe au bout du tems $t = \frac{a}{b} = \frac{AB}{b}$; il faudroit porter de chaque côté du point P des longueurs $= AB = a$: c'est-à-dire, prendre $Br = AP = ar'$: puis prendre la moitié de la somme des ordonnées, négatives et égales $r't'$ et rt, ou prendre $Pv = rt$. Ainsi la courbe AvB qui aura lieu au bout du tems $t = \frac{a}{b}$ sera la même que celle $at'n'A$, c'est-à-dire, la même que AMB doublement renversée.

Il en résulte que le tems d'une vibration est $t = \frac{a}{b}$; mais au bout d'un tems double $t = \frac{2a}{b}$, la courbe reprendra sa figure primitive AMB : car pour trouver l'ordonnée au point P au bout de ce tems, il faudra porter de part et d'autre de ce point des longueurs $= 2a = 2AB$, c'est-à-dire, prendre $ac' = PB$, et $bc = AP$, et la moitié de la somme des deux ordonnées positives et égales cd et $c'd'$, est aussi $= PM$: et ainsi de suite.

Quoiqu'il soit certain que la corde revient toujours au

même état; après le tems $t = \frac{2a}{b}$, il ne s'en suit pas que la corde n'achève dans ce tems que 2 vibrations, et il seroit même possible qu'elle en fît 4, 6, ou un nombre pair quelconque; cela dépend d'une certaine disposition de l'état initial de la corde AMB; lorsqu'elle n'a qu'un seul ventre comme dans la fig. 150, le tems d'une vibration est sans doute $t = \frac{a}{b}$. Mais si la figure initiale avoit deux ventres égaux, comme si la corde avoit Ab pour longueur, si on lui avoit donné une forme composée de deux ventres égaux séparés au milieu B par un point commun avec l'axe Ab; alors ce point B demeureroit en repos, et le mouvement de la corde Ab seroit le même que celui d'une corde de longueur moitié moindre et d'une tension égale. Or il faut pour produire ces vibrations deux fois plus rapides, que le nœud de la figure initiale soit précisément au milieu de la longueur, et que les deux ventres soient égaux et semblables entr'eux.

Sans cette disposition ou toute autre analogue, la corde n'achèvera une vibration qu'au bout du tems $t = \frac{a}{b} = \sqrt{\left\{\frac{Pa}{Fg}\right\}}$, et ne reviendra à sa position primitive qu'au bout du tems $t = \frac{2a}{b} = 2\sqrt{\left(\frac{Pa}{Fg}\right)}$. Ainsi $\sqrt{\left(\frac{Pa}{Fg}\right)}$ exprime le nombre de secondes nécessaire pour achever une vibration. Comme la tension F est représentée par un poids, on peut lui substituer le poids d'une longueur k de la corde vibrante : or on a visiblement $\frac{a}{k} = \frac{P}{F}$, d'où $F = \frac{Pk}{a}$; donc $\sqrt{\left(\frac{Pa}{Fg}\right)} = \frac{a}{\sqrt{(kg)}}$. Il résulte de là que le nombre de vibrations que la corde

fait dans chaque seconde est

$$\frac{1}{t} = \sqrt{\left(\frac{Fg}{Pa}\right)} = \frac{\sqrt{(kg)}}{a}.$$

C'est ce nombre qu'on regarde comme la mesure du son produit par une corde mise en vibration ; et on voit que, *à tension égale, le son est réciproquement proportionnel à la longueur de la corde.*

Si on fait $bt = \frac{1}{2} a$ dans l'équation (3), on a

$$y = \frac{1}{2} \{ f(x + \tfrac{1}{2} a) + f(x - \tfrac{1}{2} a) \}.$$

Or cette valeur s'évanouit visiblement, quel que soit x, si $f(\frac{1}{2} a + x) = f(\frac{1}{2} a - x)$, c'est-à-dire, si la figure ASB donnée au commencement du mouvement a des ordonnées égales correspondantes aux abscisses $\frac{1}{2} a + x$ et $\frac{1}{2} a - x$; ce qui arrive lorsque l'ordonnée élevée au milieu de AB est un diamètre de cette courbe, c'est-à-dire, la partage en deux parties semblables. Ainsi, dans ce cas, la courbe se tend en ligne droite au milieu de chaque vibration.

Fig. 149.

VI. *Calcul des variations.*

Nous avons considéré cet ouvrage comme devant servir d'étude préliminaire aux Traités de Mécanique transcendante : mais ces ouvrages étant inintelligibles aux personnes qui ne se sont pas rendu le calcul des variations familier, nous avons jugé qu'il étoit utile de présenter ici ce calcul, et de le mettre à la portée des étudians.

Avant la découverte du calcul des variations les géomètres avoient déja résolu divers problèmes intéressans qui sont de son domaine (*les Isopérimètres*) : mais les procédés dont ils se servoient ne formoient pas un corps de

doctrine, et chacun de ces problèmes n'étoit résolu que par une méthode qui lui étoit particulière, et par des artifices d'analyse souvent très-détournés. Les solutions étoient même tellement difficiles à trouver, que les savans se proposoient les problèmes comme par défis, et faisoient ainsi assaut entr'eux d'adresse et d'industrie. Il appartenoit au célèbre La Grange de mettre un terme à ces discussions polémiques, en ramenant toutes les solutions à une méthode unique, à une marche uniforme. Il faut être déja profondément instruit de toutes les ressources de l'analyse, pour sentir toute la beauté, toute l'importance de cette méthode; et nous ne craignons pas d'avancer qu'elle étoit plus difficile et peut-être aussi nécessaire à découvrir que le calcul différentiel. C'est surtout dans la Mécanique transcendante où elle joue un rôle important, et on peut même regarder cette science comme le triomphe de la méthode que nous allons offrir, en suivant la marche que *Biot* a tracée dans ses leçons au Collége de France.

Lorsqu'on a une fonction Z de plusieurs variables x, y, ... on peut se proposer deux sortes de problèmes : soit d'assigner à ces variables des *valeurs numériques*; soit d'établir des relations entre ces variables et de les *lier par des équations*, de manière à amener dans l'un et l'autre cas la fonction Z à jouir de certaines propriétés. Soit, par exemple, $Z = F(x, y, y', y'', \ldots)$, ($y'$, y'', ... désignant les coefficiens différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ...); les quantités y', y'', ... supposent que x et y sont liés par une dépendance mutuelle, telle que $y = \varphi x$. Si cette équation est donnée, on en déduit y', y'', ... en fonction de x, et substituant, Z devient $= fx$. Parmi toutes les valeurs qu'on peut

attribuer à x, s'il en est une qui rende fx un *maximum* ou un *minimum*, on peut la déterminer par les règles connues du calcul différentiel. Mais si l'équation $y = \varphi x$ n'est point donnée, alors en prenant successivement pour φx différentes formes, la fonction $Z = fx$ prendra elle-même différentes expressions en x, et on peut se proposer d'assigner à φx une forme telle que Z soit plus grande ou plus petite que pour toute autre forme de φx, *quelle que soit d'ailleurs la valeur numérique de* x. Cette dernière espèce de problème appartient au calcul des variations. Il s'en faut de beaucoup qu'il se borne à la théorie des *maxima* et *minima*; mais nous nous contenterons de traiter cette matière, parce qu'elle suffit pour l'intelligence complette de ce calcul. N'oublions pas toutefois que dans tout ce qui va être dit *les variables* x *et* y *ne sont pas indépendantes*; mais seulement que l'équation $y = \varphi x$ qui les lie entr'elles est inconnue. Nous traiterons même la question comme si elle étoit connue, ainsi que cela est fréquemment usité.

Mettons $x + i$ pour x et $y + k$ pour y dans $Z = F(x, y, y', y'', \ldots)$, Z deviendra

$$Z' = F(x + i, y + k, y' + k', y'' + k'', \ldots).$$

i et k sont deux fonctions de x, dont l'une est arbitraire et dont l'autre en dépend en vertu de l'équation $y = \varphi x$: i', i'', ... sont pris ici dans la même signification que y', y'', ... D'après les principes connus, le théorème de Taylor ayant lieu (Cal. diff. élém. de Lacroix, 121, 38), soit lorsque les quantités x, y, i, k, ... sont dépendantes, soit lorsqu'elles sont indépendantes, on a

$$Z' = Z + \left\{ i.\frac{dZ}{dx} + k.\frac{dZ}{dy} + k'.\frac{dZ}{dy'} + k''.\frac{dZ}{dy''} + \text{etc.} \right\} + \text{etc.}$$

De sorte qu'on peut regarder $x, y, y', y'', \ldots$ comme autant de variables indépendantes, en tant qu'il ne s'agit que de trouver ce développement.

Cela posé, la nature de la question exige que l'équation $y = \varphi x$ ait été déterminée de manière que, quelle que soit la valeur de x, on ait toujours $Z' > Z$, (dans le cas du *minimum*) ou $Z' < Z$, (dans le cas du *maximum*): en raisonnant comme dans la théorie des *maxima* et *minima* ordinaires, on voit qu'il faut que les termes du premier ordre soient nuls, et qu'on ait

$$i.\frac{dZ}{dx} + k.\frac{dZ}{dy} + k'.\frac{dZ}{dy'} + k''.\frac{dZ}{dy''} + \text{etc.} = 0.$$

Cette équation se partage en autant d'autres qu'elle renferme de termes, et on a

$$\frac{dZ}{dx} = 0, \quad \frac{dZ}{dy} = 0, \quad \frac{dZ}{dy'} = 0, \quad \frac{dZ}{dy''} = 0, \ldots$$

jusqu'à $y^{(n)}$, (n) étant l'ordre le plus élevé de Z. En effet comme l'une des deux quantités k et i est une fonction arbitraire de x, on peut supposer $k = a + b(x-X) + \frac{1}{2}c(x-X)^2 + \text{etc.}$ $X, a, b, c, \ldots$ étant quelconques : il est aisé d'en déduire $k', k'', \ldots$ Or comme notre équation doit avoir lieu quel que soit x, elle devra subsister lorsque $x = X$, ce qui donne $k = a$, $k' = b$, $k'' = c$, ... et fait voir qu'elle ne peut être satisfaite vu l'indépendance de $a, b, c, \ldots$ à moins que chaque terme ne soit nul.

Ces diverses équations devront s'accorder toutes entr'elles, et subsister en même tems, quel que soit x : si cet accord a lieu, il y aura *maximum* ou *minimum*, et la relation qui en résultera entre y et x sera l'équation cherchée $y = \varphi x$, qui a la propriété de rendre Z plus grand ou plus petit que ne pourroit faire toute autre relation entre

x et y. Pour distinguer le *maximum* du *minimum* on aura recours aux théories ordinaires dans lesquelles on retombe, et le signe des termes du 2°. ordre ôtera toute indécision.

Mais si ces équations ne peuvent s'accorder entr'elles, c'est-à-dire, si elles donnent des relations différentes entre x et y, le problème sera impossible dans l'état de généralité qu'on lui a donné : s'il arrive que quelques-unes seulement de ces équations s'accordent entr'elles; alors la fonction Z aura des maxima et minima relatifs à quelques-unes des quantités $x, y, y', y'', \ldots$ sans en avoir d'absolus et de communs à toutes ces quantités. Les équations qui s'accorderont entr'elles donneront les relations qui établissent les maxima et minima relatifs. Et si on ne veut rendre X un maximum ou un minimum que par rapport à l'une des quantités $x, y, y', y'', \ldots$ comme alors il ne faudra satisfaire qu'à une équation, le problème sera toujours possible.

Il suit des considérations précédentes que 1°. les quantités x et y sont dépendantes l'une de l'autre, et que néanmoins on doit les faire varier comme si elles étoient indépendantes; puisque ce n'est qu'un procédé de calcul pour parvenir au résultat. 2°. Ces variations ne sont pas infiniment petites; et si on emploie le calcul différentiel pour les obtenir, ce n'est que comme un moyen expéditif d'avoir le second terme du développement, le seul qui soit ici nécessaire.

Pour appliquer ces notions générales à un exemple soit

$$Z = (y + (m - x)y')(y + (n - x)y')$$

en cherchant $\frac{dZ}{dx}$, $\frac{dZ}{dy}$ et $\frac{dZ}{dy'}$, il sera très-aisé de reconnoître que les résultats égalés à zéro donnent des équations

incompatibles entr'elles, tant que m est différent de n; de sorte que Z n'est pas susceptible de remplir les conditions de la question. Mais si $m=n$, on a $Z=(y+(m-x)y')^2$; d'où on tire trois équations auxquelles on satisfait à-la-fois en faisant $y+(m-x)y'=0$, ou $ydx+(m-x)dy=0$; en intégrant on a $y=C(m-x)$: telle est la relation entre y et x qui rend Z un minimum : et il est aisé de s'en convaincre *à posteriori*, car Z est alors nul, et cette fonction est toujours positive.

La théorie que nous venons de donner n'est pas d'une grande étendue, et on ne la doit considérer ici que comme un développement préliminaire utile pour l'intelligence du problême beaucoup plus intéressant qui nous reste à résoudre. Il s'agit d'appliquer tous les raisonnemens précédens à une fonction de la forme $\int Z$: le signe $\int$ indique que la fonction Z est différentielle, et qu'après l'avoir intégrée entre des limites désignées, on veut la faire jouir des propriétés précédentes. La difficulté qui se rencontre ici vient donc de ce qu'il faut résoudre le problême sans faire l'intégration, car on voit assez qu'il est, en général, impossible de l'exécuter.

Au lieu de représenter par i et k les accroissemens des variables nous emploierons le signe δ; de sorte que δx, δy, ... seront des fonctions quelconques de x, y, ... qui désigneront les accroissemens de ces variables. Pareillement dx devenant $d(x+\delta x)$ croîtra de $d\delta x$; d^2x croîtra de $d^2\delta x$; etc. Observons que les variations indiquées par le signe δ sont finies, et tout-à-fait indépendantes de celles que désigne la caractéristique d : les opérations auxquelles ces signes se rapportent étant pareillement indépendantes, l'ordre dans lequel on les exécutera doit être indifférent pour le résultat. De sorte que $\delta.dx$,

et $\delta.\delta x$ sont deux choses identiques ; [illegible] $\delta^2 x$ et $\delta.\delta x$; ... et que δU et δV.

Soit donc Z une fonction de x, y, z [illegible] dx, dy, dz, ... Il s'agit d'établir les [illegible] x, y, z de manière que Z soit un [illegible] maximum, *entre les limites désignées*. Nous [illegible] et aucune différentielle constante [illegible] plus symétriques, et nous n'introduirons que [illegible] lies, parce qu'il sera aisé de généraliser [illegible] que ce cas suffit pour entendre la théorie. Nous [illegible] nous remplacerons $dx, d^2x, \ldots$ par $x', x'', \ldots$ [illegible] x par $x_1, \ldots, x_2, \ldots$ etc., de sorte que

$$Z = f(x, x', x'', \ldots, y, y', y'', \ldots, z, z', \ldots) = Z_1 = \ldots$$

Cela posé, si x, y et z reçoivent des accroissemens [illegible] tels $\delta x, \delta y$ et δz, de sorte que $x + \delta x = x_1$, $x' + \delta x' = x'_1$, etc. [illegible] variables δx_2, et ainsi des autres, de sorte que [illegible] prit Z, que le théorème de Taylor et [illegible] Z deviendra

$$Z_1 = Z + \int \frac{dZ}{dx}\delta x + \frac{dZ}{dy}\delta y + \frac{dZ}{dz}\delta z + \frac{dZ}{dx'}\delta x' + \frac{dZ}{dy'}\delta y' + \frac{dZ}{dz'}\delta z' + \ldots$$
$$+ \frac{dZ}{dx_1}\delta x_1 + \frac{dZ}{dx_2}\delta x_2 + \frac{dZ}{dy_1}\delta y_1 + \frac{dZ}{dz_1}\delta z_1 + \ldots + \frac{1}{2}\int \ldots$$

et on trouve que la condition du maximum et du minimum exige que l'intégrale des termes du premier ordre soit nulle entre les limites désignées, et cela quels que soient δx, δy et δz : ainsi qu'on l'a vu précédemment. Soumettant la différentielle de Z en regardant $x, x_1, x_2, \ldots y, y_1, y_2, \ldots$ etc. comme autant de variables indépendantes, nous aurons

$$dU = M\delta x + N\delta y + P\delta z + m\delta x' + n\delta y' + p\delta z' + \ldots + m_1\delta x_1 + n_1\delta y_1 + \ldots$$

$M, N, P, \ldots m, n, p, \ldots m_1, n_1, p_1, \ldots$ étant les coefficiens des

différences partielles de Z par rapport à $x, x_{,}, \ldots y, y_{,}, \ldots z, z_{,}, \ldots$ Si on eût pratiqué cette différentiation absolument de la même manière en employant le signe δ, on auroit eu

$$\left.\begin{array}{l} \delta Z = M\delta x + N\delta x_{,} + P\delta x_{,,} + Q\delta x_{,,,} + \text{etc.} \\ \quad + m\delta y + n\delta y_{,} + p\delta y_{,,} + q\delta y_{,,,} + \text{etc.} \\ \quad + \mu\delta z + \nu\delta z_{,} + \pi\delta z_{,,} + \chi\delta z_{,,,} + \text{etc.} \end{array}\right\} \ldots (A).$$

Or cette quantité est précisément celle qui est sous le signe $\int$ dans les termes du premier ordre de notre développement : ensorte que la condition du maximum ou du minimum demandée, est que $\int \delta Z = 0$, entre les limites désignées, quelles que soient les variations $\delta x, \delta y, \delta z$. Observons qu'ici, comme précédemment, le calcul différentiel n'est employé que comme un moyen facile d'obtenir l'assemblage des termes qu'il faut égaler à zéro; de sorte que les variations sont encore ici finies et quelconques. D'ailleurs dans chaque cas particulier, on obtiendra aisément la valeur δZ, c'est-à-dire, les quantités $M, N, \ldots m, n, \ldots$, qui composent l'équation (A) dont le nombre de termes est limité : il suffira pour cela de différentier Z en employant le signe δ, et regardant x, y, z; dx, dy, dz; ... comme autant de variables indépendantes.

La première ligne de l'équation (A) a pour intégrale

$$\int (M\delta x + Nd.\delta x + Pd^{2}.\delta x + Qd^{3}.\delta x + \text{etc.})$$

$M, N, \ldots$ contiennent des différentielles, de sorte que le défaut d'homogénéité n'est ici qu'apparent. La suite du calcul fera voir qu'il est nécessaire de dégager du signe $\int$, autant que possible, les termes qui contiennent $d.\delta$. Pour y parvenir on emploie la formule connue $\int X dY = XY - \int Y dX$: de sorte qu'on obtient

$$\int N d.\delta x = N\delta x - \int dN.\delta x,$$
$$\int P d^2.\delta x = Pd.\delta x - dP.\delta x + \int d^2P.\delta x$$
$$\int Q d^3.\delta x = Qd^2\delta x - dQd.\delta x + d^2Q.\delta x - \int d^3Q.\delta x.$$

En réunissant ces résultats, on a cette suite dont la loi est facile à saisir

$$\int (M - dN + d^2P - d^3Q + d^4R\ldots)\delta x + (N - dP + d^2Q - d^3R\ldots)\delta x$$
$$+ (P - dQ + d^2R - \ldots)d\delta x + (Q - dR + \ldots)d^2.\delta x + (R - \ldots)d^3\delta x.$$

En remplaçant M, N, ... par m, n, ... ou μ, ν; et δx par δy ou δz, on trouve les intégrales des deux autres lignes de l'équation (A); de sorte que $\int \delta Z = o$ devient

$$\int \{(M - dN + d^2P - d^3Q\ldots)\delta x + (m - dn + d^2p\ldots)\delta y + (\mu - d\nu + d^2\pi\ldots)\delta z\}$$
$$+ (N - dP + d^2Q\ldots)\delta x + (n - dp + d^2q - \ldots)\delta y + (\nu - d\pi + \ldots)\delta z$$
$$+ (P - dQ + \ldots)d.\delta x + (p - dq + \ldots)d.\delta y + (\pi - \ldots)d.\delta z + \text{etc.} = o \ldots (B).$$

La première ligne de cette équation est composée de termes qui restent sous le signe $\int$, et qui ne peuvent être intégrés à moins qu'on ne donne à δx, δy et δz des valeurs particulières, ce qui est contre l'hypothèse. Par conséquent $\int \delta Z$ ne peut devenir $= o$, à moins que ces termes ne soient nuls : et si la nature de la question n'établit entre δx, δy et δz aucune relation, vu l'indépendance de ces variations, on a

$$\left.\begin{aligned} o &= M - dN + d^2P - d^3Q + d^4R - \text{etc.} \\ o &= m - dn + d^2p - d^3q + d^4r - \text{etc.} \\ o &= \mu - d\nu + d^2\pi - d^3\chi + d^4\varrho - \text{etc.} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (C).$$

Ces équations entre x, y et z donnent les relations demandées (*); elles ne peuvent d'ailleurs exprimer des con-

(*) En géométrie ces équations appartiennent à la courbe ou à la surface cherchée.

ditions distinctes sans faire voir que la question est absurde, puisqu'elles déterminent alors les valeurs numériques des variables.

Les termes qui sont ainsi disparus de l'équation (B), doivent être remplacés par une constante arbitraire C; et comme l'intégrale est effectuée et doit être prise entre les limites désignées, les termes qui restent se rapportent à ces limites, car l'équation (B) est devenue de la forme $C + L = 0$, L étant une fonction de x, y, z, δx, δy, δz, ... Marquons d'un et de deux accens les valeurs numériques de ces variables à la première et à la seconde limites. Comme l'intégrale a dû être prise entre ces limites, il faut d'abord déterminer C en mettant x', y', ... pour x, y, ... dans $C + L = 0$, ce qui donne $C + L' = 0$, d'où $C = -L'$, et $L - L' = 0$. De plus il faut completter l'intégrale, c'est-à-dire, changer x, y, ... en x'', y'', ...; ce qui donne $L'' - L' = 0$. D'où on voit qu'il faut marquer les divers termes qui restent dans l'équation (B) d'abord d'un, puis de deux accens; retrancher les résultats et égaler à zéro : de sorte que $L'' - L'$ ne renferme plus de variables, puisqu'elles ont pris les valeurs que les limites comportent et que x, δx, ... sont devenus x', $\delta x'$, ... x'', $\delta x''$ ... Il se présente maintenant trois cas.

1°. *Si les limites sont données et fixes* (*), c'est-à-dire,

(*) Ce cas revient en géométrie à celui où on cherche une courbe qui passe par deux points donnés, et qui jouisse de la propriété de maximum ou minimum demandée. Les équations (C), qui doivent s'accorder entr'elles, sont celles de la courbe cherchée; on détermine les constantes de manière à satisfaire à la condition qui exige que la courbe passe par les deux points donnés.

si les valeurs extrêmes de x, y et z sont constantes, comme $\delta x'$, $d.\delta x'$, etc. $\delta x''$, $d.\delta x''$, etc. sont nuls, tous les termes de L' et L'' sont nuls, et l'équation (B) est satisfaite d'elle-même. Alors on détermine les constantes que l'intégration introduit dans les équations (C) par les conditions que comportent les limites.

2°. *Si les limites sont arbitraires et indépendantes*, alors chacun des coefficiens de (B) est nul en particulier, ainsi qu'il est facile de s'en convaincre.

3°. *S'il existe des équations de condition* pour les limites (*), c'est-à-dire, si la nature de la question lie entr'elles par des équations quelques-unes des quantités x', y', z', x'', y'', z'', on se servira des différentielles de ces équations pour obtenir plusieurs des variations $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $\delta x''$, etc. en fonction des autres ; en substituant dans $L'' - L' = 0$, ces variations se trouveront réduites au plus petit nombre possible : ces dernières étant absolument indépendantes, l'équation se partagera en plusieurs autres, en égalant leurs coefficiens à zéro.

Au lieu de cette marche on peut prendre la suivante qui est infiniment plus élégante. Soient $u = 0$, $u' = 0$, ... les équations de condition données, on multipliera leurs variations δu, $\delta u'$, ... par des indéterminées λ, λ', ... ; ce qui donnera $\lambda\delta u + \lambda'\delta u' + \ldots$ Ajoutant cette somme à $L'' - L'$, on aura $L'' - L' + \lambda\delta u + \lambda'\delta u' + \ldots = 0$. On traitera toutes les variations $\delta x'$, $\delta x''$, ... comme indépendantes, et égalant leurs coefficiens à zéro, on éliminera entre ces équations les indéterminées λ, λ', ... On

(*) Cela signifie en géométrie que la courbe cherchée doit être terminée, non plus à des points fixes, mais à quelqu'un des points de deux courbes données.

parviendra par ce calcul au même résultat que par la méthode précédente ; car outre qu'on peut s'en assurer par le calcul même, on peut voir qu'on n'a fait que des opérations permises, et qu'on obtient ainsi le même nombre d'équations finales. (Ce calcul revient à la méthode d'élimination donnée dans l'algèbre de Lacroix).

Il faut observer qu'on ne doit pas conclure de $u = 0$, qu'aux limites on ait $du = 0, \ldots$; ces conditions sont indépendantes, et peuvent fort bien ne pas co-exister. Si toutefois la chose avoit lieu ainsi (*), il faudroit regarder $du = 0, \ldots$ comme de nouvelles équations de condition, et outre le $\lambda \delta u$, il faudroit aussi comprendre $\lambda' \delta du, \ldots$

Nous n'avons rien dit ici du cas où l'une des limites est fixe et la seconde assujettie à certaines conditions, ou même tout-à-fait arbitraire parce que cela rentre dans les trois cas précédens.

Il pourroit aussi arriver que la nature de la question assujettit les variations δx, δy et δz à de certaines conditions données par des équations $s = 0, s' = 0, \ldots$; et cela indépendamment des limites (**) : alors la première ligne de l'équation (B) ne formeroit plus trois équations (C). Il faudroit d'abord réduire, comme ci-dessus, les variations au plus petit nombre possible dans

$$(D)\ldots(M - dN + d^2P - d^3Q + \ldots)\delta x + (m - dn + d^2p \ldots)\delta y + (\mu - d\nu + \ldots)\delta z = 0$$

à l'aide des équations de condition, et égaler à zéro les coefficiens des variations restantes. Ou, ce qui revient au

(*) Cela signifieroit en géométrie que la courbe cherchée doit avoir à sa limite un contact d'un certain ordre avec la courbe ou la surface dont l'équation est $u = o$.

(**) Cela arrive en géométrie lorsque la courbe cherchée doit être tracée sur une surface courbe donnée.

[illegible] garder [illegible] les [illegible]

[illegible] des variations [illegible] faire mieux [illegible]

[illegible] deux points don- [illegible]

[illegible] $Z = \int\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$, [illegible] entre les limites [illegible]

$$\delta Z = \frac{dx}{ds}\delta dx + \frac{dy}{ds}\delta dy + \frac{dz}{ds}\delta dz\,;$$

[illegible] on trouve (*)

$$M = 0,\ m = 0,\ \ldots = 0,\ N = \frac{dx}{ds},\ n = \frac{dy}{ds},\ \nu = \frac{dz}{ds}\,:$$

[illegible] autres coefficiens P, p, σ, sont nuls. Les équations (C) [illegible] $d\left(\frac{dx}{ds}\right) = 0,\ d\left(\frac{dy}{ds}\right) = 0,\ d\left(\frac{dz}{ds}\right) = 0$; [illegible] conclut $dx = a\,ds$, $dy = b\,ds$ et $dz = c\,ds$. En [illegible] ces trois équations, et ajoutant, on trouve [illegible] $= 1$; ainsi ces équations sont compatibles [illegible], lorsqu'on détermine l'une des constantes [illegible] par cette équation. En divisant deux à deux nos [illegible] nous avons $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{c}{a}$; d'où on tire

$$bx = ay + a',\ cx = az + b',$$

(*) Nous ferons observer que dans les cas particuliers il est plus court, et souvent préférable de faire sur la fonction donnée Z tous les calculs qui ont conduit à l'équation (B), au lieu de comparer ainsi que nous le faisons ici.

ce qui apprend que les projections de la ligne cherchée sont des droites ; ainsi cette ligne est une droite elle-même.

Pour en déterminer la position, il faudroit connoître Fig. 151. les cinq constantes a, b, c, a' et b'. S'il s'agit de trouver la plus courte distance entre deux points A et C; alors la droite est fixée en ces points, donnés par leurs coordonnées x', y', z'; x'', y'', z''; il est clair qu'en assujettissant nos deux équations à être satisfaites lorsqu'on change x, y et z en x', y' et z', on obtiendra deux équations entre les constantes. La seconde limite donne de même deux autres relations; ce qui fait cinq équations, en y comprenant $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Si la seconde limite étoit un point fixe C dans le plan Fig. 151. xy; et la première une courbe AB située aussi dans ce plan, et dont l'équation $y' = fx'$ donne $\delta y' = A\delta x'$; en faisant les raisonnemens ci-dessus dans ce plan, on a pour la ligne cherchée AC une droite dont l'équation est

$$b\delta x = a\delta y, \text{ ou } bx = ay + a'.$$

On trouve aisément $L = \frac{dx}{ds}.\delta x + \frac{dy}{ds}.\delta y$; et comme la seconde limite C est fixe, il suffit de combiner ensemble les équations $\delta y' = A\delta x'$, et $dx'.\delta x' + dy'.\delta y' = 0$. En éliminant $\delta y'$ on obtient $dx' + Ady' = 0$. On auroit pu aussi multiplier l'équation de condition $\delta y' - A\delta x' = 0$ par l'indéterminée λ, et ajouter à L', ce qui eût donné

$$\frac{dx'}{ds'}.\delta x' + \frac{dy'}{ds'}.\delta y' + \lambda\delta y' - \lambda A\delta x' = 0.$$

Equation qui se décompose en deux autres $\frac{dx'}{ds'} - \lambda A = 0$, $\frac{dy'}{ds'} + \lambda = 0$. Eliminant λ, on obtient de même $dx' + Ady' = 0$.

Cette équation comparée à celle $bdx' = ady'$, transforme celle de notre droite AC en $dx = Ady$, qui donne $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{A}$, et fait voir qu'elle est normale à la courbe proposée AB. La constante a' se détermine par la considération de la seconde limite.

Il seroit facile d'appliquer le raisonnement précédent aux trois dimensions, on parviendroit à la même conséquence : on peut donc conclure qu'en général la plus courte distance AC entre deux courbes AB, CD, est la droite qui leur est normale.

Si la plus courte ligne demandée devoit être tracée sur une surface courbe, dont $u = 0$ seroit l'équation, alors l'équation (D) ne se décomposeroit plus en trois : à moins qu'on n'y ajoutât le terme $\lambda \delta u$; alors on pourroit regarder δx, δy et δz comme indépendans, et on trouveroit les relations

$$d\left(\frac{dx}{ds}\right)+\lambda\left(\frac{du}{dx}\right)=0, d\left(\frac{dy}{ds}\right)+\lambda\left(\frac{du}{dy}\right)=0, d\left(\frac{dz}{ds}\right)+\lambda\left(\frac{du}{dz}\right)=0.$$

Eliminant λ, on a les deux équations

$$\frac{du}{dz}d\left(\frac{dx}{ds}\right)=\frac{du}{dx}d\left(\frac{dz}{ds}\right), \frac{du}{dy}d\left(\frac{dz}{ds}\right)=\frac{du}{dz}d\left(\frac{dy}{ds}\right)$$

qui sont celles de la courbe cherchée.

Prenons la sphère pour exemple ; l'origine étant au centre, on a

$$u=x^2+y^2+z^2-r^2=0, \frac{du}{dx}=2x, \frac{du}{dy}=2y, \frac{du}{dz}=2z.$$

Nos équations deviennent en prenant ds constant

$$zd^2x=xd^2z, zd^2y=yd^2z, \text{ d'où } yd^2x=xd^2y.$$

Intégrant, on a $zdx - xdz = ads$, $zdy - ydz = bds$;

$ydx - xdy = cds$. En multipliant la première de ces équations par $-y$, la seconde par x, la troisième par z, et ajoutant, on trouve $ay - bx - cz = 0$, qui est l'équation d'un plan qui passe par l'origine des coordonnées. Ainsi la courbe cherchée est le grand cercle qui passe par les deux points donnés, ou qui est normale aux deux courbes qui servent de limites et sont données sur la surface sphérique.

II. Prenons pour second exemple la *Brachystochrone*.

Nous avons vu (193, r') que le tems qu'un corps pesant met à parcourir l'arc s est $\int \frac{ds}{\sqrt{(2g(z-h))}}$, les z étant verticaux : on a donc ici $Z = \frac{ds}{\sqrt{(z-h)}}$ abstraction faite de la constante $2g$, qui disparoît lorsqu'on égale à zéro. On formera δZ et on aura

$$M=0, m=0, \mu=-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{ds}{(z-h)^{\frac{3}{2}}}, N=\frac{dx}{ds\sqrt{(z-h)}}, n=\frac{dy}{ds\sqrt{(z-h)}}$$

$$\nu=\frac{dz}{ds\sqrt{(z-h)}}; P=Q=p=q=\pi=\ldots=0.$$

Les équations (C) deviennent donc

$$d\left(\frac{dx}{ds\sqrt{(z-h)}}\right)=0, \quad d\left(\frac{dy}{ds\sqrt{(z-h)}}\right)=0 \ldots (1).$$

Nous omettons ici la troisième, qu'on peut démontrer comprise dans les deux autres : condition sans laquelle le problème proposé seroit absurde. En intégrant et divisant l'un par l'autre les résultats, on obtient $dy = adx$, ce qui prouve que la projection de la courbe sur le plan xy est une droite, et que par conséquent cette courbe est décrite dans un plan vertical. Prenons, pour abréger, ce plan pour celui des xz; la première des valeurs (1) suffira,

et nous aurons $dx = C ds \sqrt{(z-h)}$; or $ds^2 = dx^2 + dz^2$, donc on a

$$dx = \frac{C\sqrt{(z-h)}\,dz}{\sqrt{(1-C^2(z-h))}} \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

Équation qui appartient à une cycloïde, et qui revient à celle du n°. 401, en faisant $z - h = y$.

Var. (1). Si les limites sont deux points fixes A et C', il n'y a aucune autre condition à remplir si ce n'est de faire passer la cycloïde AC' par ces deux points; ce qui détermine les valeurs des constantes.

Si la seconde limite est un point fixe C', et si la première est une courbe AB située, ainsi que le point fixe, dans un plan vertical, en prenant ce plan pour celui des xz ; on a $y = 0$, et on en déduit

$$\delta t = \frac{dx}{ds\sqrt{(z-h)}}\,\delta x + \frac{dz}{ds\sqrt{(z-h)}}\,\delta z.$$

Comme on a $\delta x' = 0$, $\delta z' = 0$, il suffit de rendre L' nul, en ayant égard à la première limite, qui est une courbe AB dont $x' = fz'$ est l'équation donnée. On en déduit $\delta x' - A\delta z' = 0$; multipliant par λ, ajoutant à L', on trouve les deux équations

$$\frac{dx'}{ds'\sqrt{(z'-h)}} + \lambda = 0, \quad \frac{dz'}{ds'\sqrt{(z'-h)}} - A\lambda = 0.$$

En éliminant λ, on obtient $dz' + A dx' = 0$. Il est visible maintenant que la cycloïde devra couper à angle droit la courbe donnée AB ; la constante C sera déterminée en comparant l'équation (2) à la précédente. On trouveroit dans les trois dimensions la même conséquence, de sorte que la courbe de plus vite descente d'une courbe quelconque à une autre AB, est une cycloïde AC' normale à ces deux dernières. La même chose auroit aussi lieu pour

Var. (2).

deux surfaces courbes, ainsi qu'il est facile de s'en convaincre.

Si la Brachystochrone devoit être tracée sur une surface courbe donnée par son équation $u = 0$, l'équation (D) ne se partageroit en trois autres qu'après avoir ajouté $\lambda \delta u$, ce qui donneroit au lieu des équations (1) trois équations entre lesquelles éliminant λ, on auroit les équations de la Brachystochrone cherchée. Si on avoit pour limites deux points fixes, les constantes seroient déterminées par la condition que la courbe passât par ces deux points : lorsqu'on a pour limites deux courbes, celle qu'on cherche doit les couper à angle droit comme ci-dessus. Ainsi le reste du problème est le même dans les deux cas.

III. *Principe de la moindre action.*

Nous avons vu (168, d' ; 215) que lorsqu'un point matériel décrit une courbe, soit librement et en vertu des forces qui l'animent, soit en parcourant une surface sur laquelle il est assujetti à rester, on a pour la valeur de sa vitesse v, lorsque X, Y et Z sont indépendantes de t,

$$v^2 = C + f(Xdx + Ydy + Zdz) \ldots . (1).$$

Nous allons prouver que $fvds$ est un minimum ou maximum, entre le point de départ et le point d'arrivée; c'est-à-dire, que $\delta fvds = 0$, ou que

$$f(v\delta . ds + ds\delta v) = 0.$$

Pour le démontrer, formons la quantité $f(v\delta ds + ds\delta v)$.

1°. On a $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$; différentiant par δ, il vient (à cause de $ds = vdt$)

$$v\delta . ds = \frac{dx}{dt}.\delta dx + \frac{dy}{dt}.\delta dy + \frac{dz}{dt}.\delta dz.$$

Intégrons et dégageons les termes affectés de δd, à l'aide

de l'intégration par parties. En omettant les termes intégrés $\frac{dx}{dt}.\delta x + \frac{dy}{dt}.\delta y + \frac{dz}{dt}.\delta z$ qui se rapportent aux limites, et qui sont nuls puisqu'il s'agit de deux points fixes, on a

$$\int v\delta.ds = -\int\left\{d\left(\frac{dx}{dt}\right).\delta x + d\left(\frac{dy}{dt}\right).\delta y + d\left(\frac{dz}{dt}\right).\delta z\right\}.$$

2°. L'équation (1) différentiée, donne en changeant d en δ, $v\delta v = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$; or $vdt = ds$, donc en intégrant

$$\int ds\delta v = \int(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,dt.$$

Réunissant ces deux résultats, $\int(v\delta ds + ds\delta v)$ devient

$$\int\left\{(Xdt - d\left(\frac{dx}{dt}\right))\delta x + (Ydt - d\left(\frac{dy}{dt}\right))\delta y + (Zdt - d\left(\frac{dz}{dt}\right))\delta z\right\}.$$

Or cette expression est nulle, 1°. lorsque le mobile se meut librement, puisque chaque terme est nul en particulier, d'après les équations (b', 166); 2°. quand le mobile est assujetti à décrire une surface, puisque ces mêmes équations ont encore lieu, pourvu qu'on exprime que les variations δx, δy et δz ont entr'elles une relation que l'équation de la surface donne; ainsi on a en général $\delta\int v ds = 0$; c'est en cela que consiste le *principe de la moindre action*. Ce même principe a également lieu lorsqu'il s'agit d'un système de corps, mais il n'est pas de notre objet de nous en occuper. Il nous suffira de faire remarquer que lorsque le mobile décrit une surface, sans qu'aucune force accélératrice agisse sur lui, la vitesse v étant constante, on a $v\int ds$ ou vs qui est un minimum entre les limites désignées : ce qui veut dire que le mobile décrit l'arc de courbe le plus court qu'on puisse tracer sur la surface, du point de départ au point d'arrivée.

Fin des Notes.

TABLE

CONTENANT LES PESANTEURS SPÉCIFIQUES DE DIFFÉRENTES SUBSTANCES.

1°. *Substances métalliques.*

Or à 24 karats, fondu non forgé	19258
Or au titre de Paris ou à 22 karats, *idem*	17486
Argent à 12 deniers, fondu et non forgé	10474
Argent au titre de Paris ou à 11 deniers 10 grains, *idem*	10178
Platine brut en grenailles	15601
Platine purifié fondu	19500
Cuivre rouge fondu et non forgé	7788
Fer fondu	7207
Fer forgé en barre, écroui ou non écroui	7788
Acier ni trempé ni écroui	7833
Etain pur de Cornouailles, fondu et non écroui	7291
Plomb fondu	11352
Zinc fondu	7190
Antimoine fondu	6702
Arsenic fondu	5763
Mercure coulant	13568
Cinabre rouge d'Almaden	6902

2°. *Pierres précieuses.*

Diamant oriental blanc	5521
Rubis oriental	4283
Topaze orientale	4010

3°. *Pierres siliceuses.*

Cristal de roche limpide de Madagascar	2653
Quartz cristallisé	2654
Grès de paveurs	2[illegible]
Agate orientale	2[illegible]
Agate onix	2[illegible]
Calcédoine	2[illegible]
Cornaline	2[illegible]
Pierre à fusil blonde	2[illegible]
Pierre à fusil noirâtre	2[illegible]
Jaspe vert clair	2[illegible]
Jaspe brun	2[illegible]

4°. *Pierres diverses.*

Albatre oriental blanc antique	2730a
Marbre de Bourbon-l'Ancy	26957
Marbre dit brèche d'Alep	26867
Pierre de St.-Leu de la carrière de St.-Leu	16593
Pierre de liais	20778
Spath pesant gris, dit pierre de Bologne	44409
Spath fluor blanc	31555
Granit rouge d'Egypte	26541
Granit rouge du Dauphiné	26431
Pierre ponce	9145
Porcelaine de Sèvres	21457
Soufre natif	20332
Soufre fondu	19907

5°. *Liqueurs.*

Eau distillée	10000
Eau de Seine filtrée	10001,5
Vin de Bourgogne	9915
Vin de Bordeaux	9939
Alkool du commerce	8371
Alkool très-rectifié	8293

6°. *Huiles.*

Huile d'olive	9153
Huile de noix	9227
Huile de lin	9403
Huile de navette	9193

7°. *Gommes, Résines et Graisses.*

Résine jaune ou blanche du pin	10727
Sandarac	10920
Gomme arabique	14523
Opium	13365
Cire jaune	9648
Cire blanche	9686
Suif	9419
Graisse de cochon	9368
Lard	9478
Beurre	9423

8°. *Bois.*

Chêne de 60 ans, le cœur	11700
Liége	2400
Orme, le tronc	6710
Frêne, le tronc	8450
Hêtre	8520
Aune	8000

Erable.	7550
Noyer de France.	6710
Saule.	5850
Tilleul.	6040
Sapin mâle.	5500
Sapin femelle.	4980
Peuplier.	3830
Pommier.	7930
Poirier.	6610
Prunier.	7850
Cerisier.	7150
Coudrier ou noisetier.	6000
Buis de France.	9120
Vigne.	13270
Sureau.	6950
Jasmin d'Espagne.	7700
Gayac.	13330
Ebenier d'Amérique.	13310
Bois rouge du Brésil.	10310
Bois de Campêche.	9130
Cédre.	5960
Oranger.	7050
Citronnier.	7263

9°. *Airs ou Gaz.*

Air atmosphérique.	0,46005
Gaz oxygène.	0,50694
Gaz hydrogène.	0,03539
Gaz acide carbonique.	0,68985
Gaz ammoniac.	0,27488

FIN.

4°. *Pierres diverses.*

Albatre oriental blanc antique.	2730
Marbre de Burbon-l'Ancy.	2695
Marbre dit brèche d'Alep.	2667
Pierre de St.-Leu de la carrière de St.-Leu.	1659
Pierre de liais.	2078
Spath pesant gris, dit pierre de Bologne.	4440
Spath fluor blanc.	3155
Granit rouge d'Egypte.	2614
Granit rouge du Dauphiné.	2653
Pierre ponce.	9145
Porcelaine de Sèvres.	2145
Soufre natif.	2033
Soufre fondu.	1990

5°. *Liqueurs.*

Eau distillée.	10000
Eau de Seine filtrée.	10001,5
Vin de Bourgogne.	9915
Vin de Bordeaux.	9939
Alkool du commerce.	8371
Alkool très-rectifié.	8293

6°. *Huiles.*

Huile d'olive.	9153
Huile de noix.	9227
Huile de lin.	9403
Huile de navette.	9193

7°. *Gommes, Résines et Graisses.*

Résine jaune ou blanche du pin.	10727
Sandarac.	10920
Gomme arabique.	14523
Opium.	13365
Cire jaune.	9648
Cire blanche.	9686
Suif.	9419
Graisse de cochon.	9368
Lard.	9478
Beurre.	9423

8°. *Bois.*

Chêne de 60 ans, le cœur.	11700
Liége.	2400
Orme, le tronc.	6710
Frêne, le tronc.	8450
Hêtre.	8520
Aune.	8000

Erable	7550
Noyer de France	6710
Saule	5850
Tilleul	6040
Sapin mâle	5500
Sapin femelle	4980
Peuplier	3830
Pommier	7930
Poirier	6610
Prunier	7850
Cerisier	7150
Coudrier ou noisetier	6000
Buis de France	9120
Vigne	13270
Sureau	6950
Jasmin d'Espagne	7700
Gayac	13330
Ebenier d'Amérique	13310
Bois rouge du Brésil	10310
Bois de Campêche	9130
Cèdre	5960
Oranger	7050
Citronnier	7263

9°. *Airs ou Gaz.*

Air atmosphérique	0,46005
Gaz oxygène	0,50694
Gaz hydrogène	0,03539
Gaz acide carbonique	0,68985
Gaz ammoniac	0,27488

FIN.

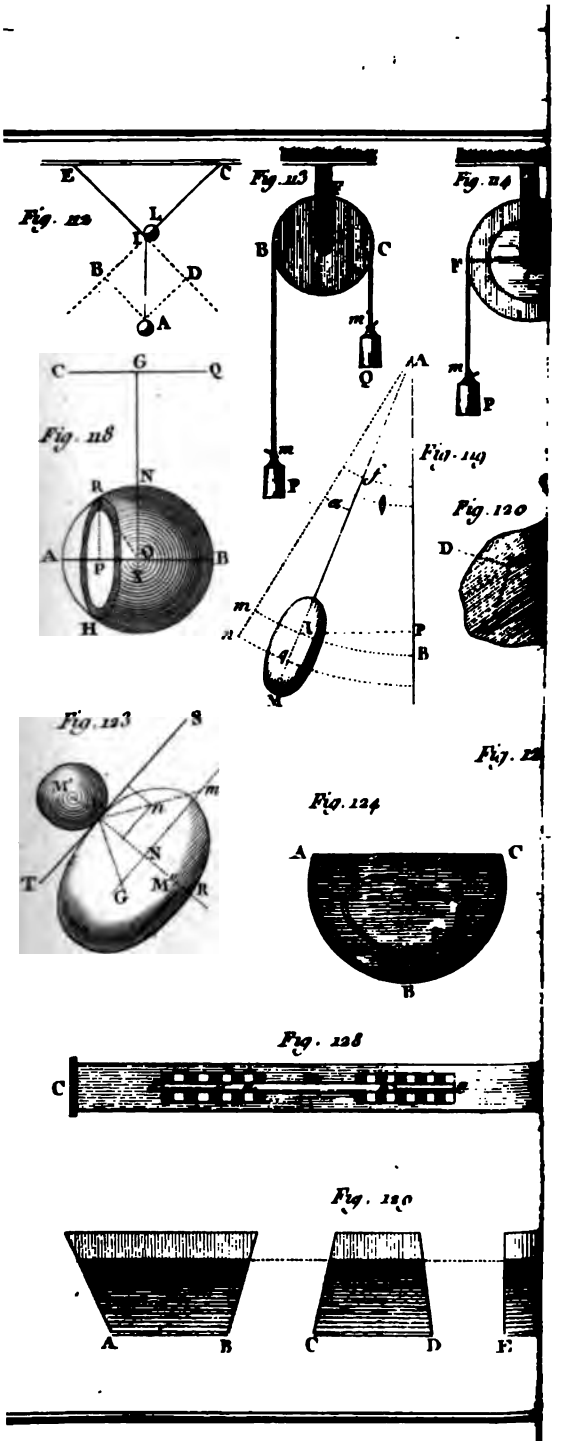
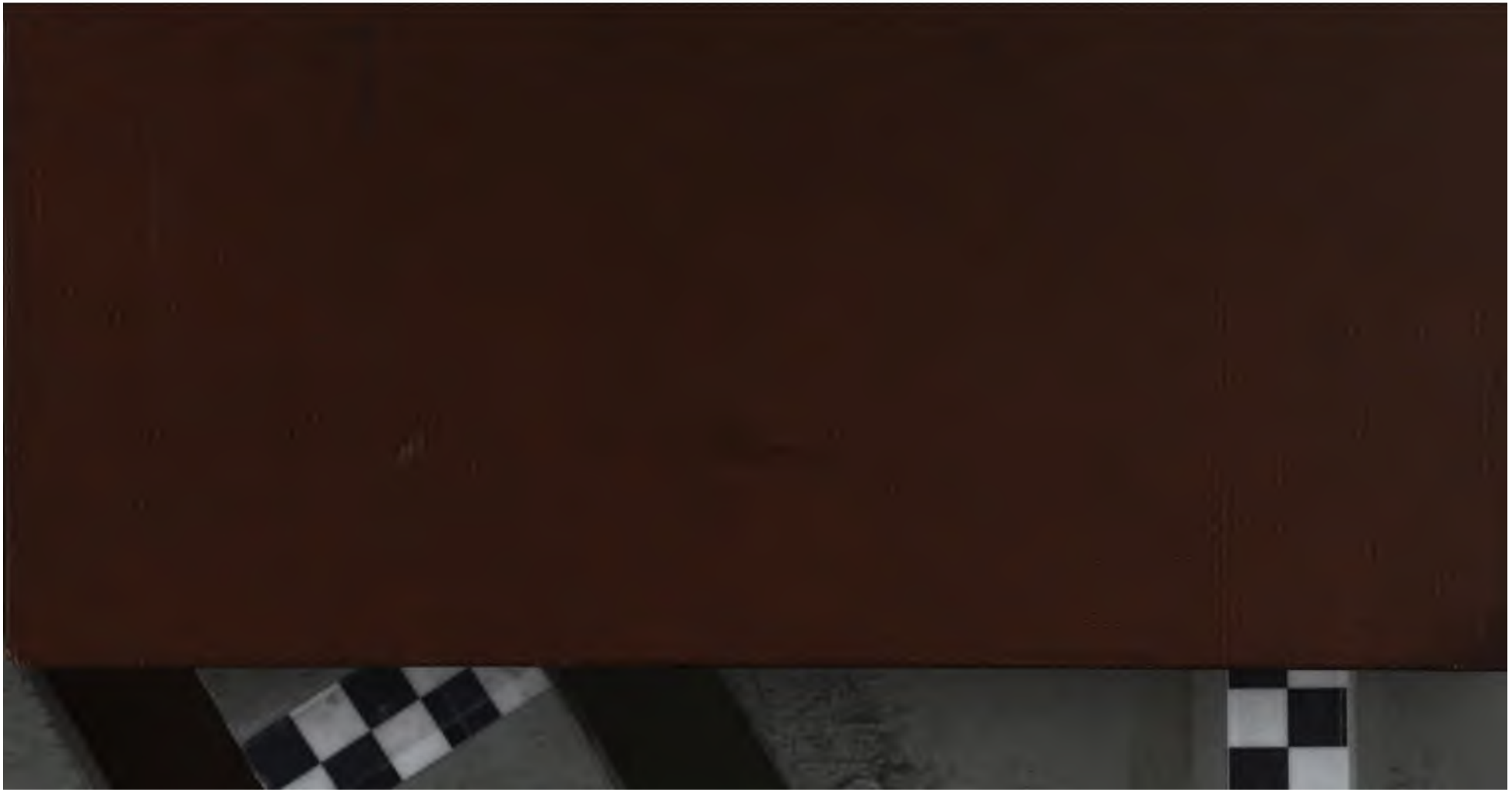


Fig. 112
Fig. 113
Fig. 114
Fig. 118
Fig. 119
Fig. 120
Fig. 123
Fig. 124
Fig. 128
Fig. 129